

**РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЕРЕМІЩЕНЬ ТОЧОК ШТАМПА
ПРИ СТАТИЧНИХ ВИПРОБУВАННЯХ ДОРОЖНІХ КОНСТРУКЦІЙ**

**THE DEVELOPMENT OF STAMP POINTS DISPLACEMENT MATHEMATICAL MODEL
BY STATIC TESTS OF ROAD STRUCTURES**



Shuliak Ivan Stanislavovych, Candidate of Technical Sciences, National Transport University, Associate Professor of the Department of Road Design, Geodesy and Land Management, e-mail: i.s.shuliak@gmail.com, +380506437690,

<https://orcid.org/0000-0003-0609-731X>



Sukhonosov Serhii Oleksandrovych, State Enterprise «Scientific and technical center «Road quality control», Deputy Director of supervision over road operating condition and traffic safety, e-mail: s.o.sukhonosov@gmail.com, +380630637653,

<https://orcid.org/0000-0001-5140-920X>



Chechuha Oleksand S., Candidate of Engineering Science (Ph.D.), Associate Professor, National Transport University, Associate Professor of Department of Transport Construction and Property Management, e-mail: chechuga77@gmail.com, tel. +380662019442, Ukraine, 01010, Kyiv, M. Omelianovycha-Pavlenka Str., 1, office 138.

<https://orcid.org/0000-0003-1643-6354>

Abstract. In various static stamp tests methods, both foreign and Ukrainian, it is foreseen to use a different number of sensors for stamp settlement measuring.

Austrian method with three displacement sensors allows to reveal the stamp warping while loading, but it is unclear how to determine the settlement in the stamp center, when the sensor readings at the moment of warping will be completely different. The German method with a single displacement sensor is much simpler, but does not consider the stamp warping. The use of Ukrainian methodology is not appropriate at all, because two displacement sensors do not allow to observe the stamp warping.

The article is focused on mathematical model for the displacement of stamp points in road structures static testing development with theoretical justification of necessary and sufficient number of sensors for stamp settlement measuring.

Initially, the stamp displacement under warping in a flat deformed condition is considered as a rotation on a certain angle α and a parallel transfer.

It has been established that in this case, the stamp settlement with enough accuracy for engineering practice can be measured with a single displacement sensor installed in the stamp center.

In fact, the stamp can rotate not only around the axis O_y , but also around the O_x axis. Therefore, a separate mathematical model is constructed and describes the process of stamp displacement while it's warping in a volumetric deformed condition.

The developed mathematical model provides an opportunity to determine the settlement in the stamp center, necessary for the modulus of elasticity calculation or modulus of deformation in the case when the stamp at the warping moment will rotate both around the axis O_y and around the O_x axis, and the rotation angles α and β will be significant.

Keywords: road structure, static stamp tests, displacement sensors, stamp warping, settlement in the stamp center.

Introduction. One of the most objective methods of road structures condition assessing and their layers is the plate bearing tests in which the load is transmitted through a rigid stamp and the vertical deformation (full or elastic) is measured before or after the load is removed. According to the defined full or elastic deflection, respectively, is the deformation module or modulus of elasticity, which are the main indicators of layer deformation or road structure as a whole.

Materials and methods. Different methods of static plate bearing tests, both foreign and Ukrainian, provide different number of displacement sensors use for stamp settlement measuring (Fig. 1).

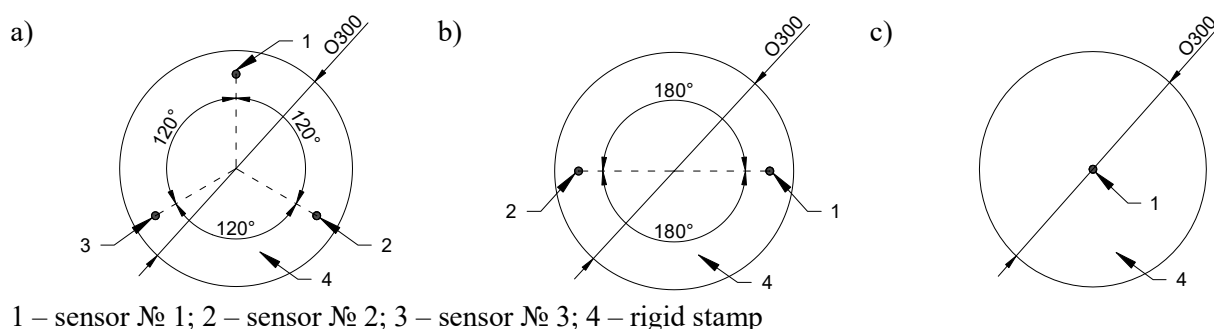


Figure 1 – Schemes of displacement sensors placement by the methodology: a) ÖNORM B 4417 (Austria) [1-5]; б) VBN V.2.3-218-186-2004 (Ukraine) [6]; в) DIN 18134 (Germany) [1, 7]

Рисунок 1 – Схеми розміщення датчиків переміщень за методикою: а) ÖNORM B 4417 (Австрія) [1-5]; б) ВБН В.2.3-218-186-2004 (Україна) [6]; в) DIN 18134 (Німеччина) [1, 7]

Austrian technique use with three displacement sensors [1-5] (Fig. 1, a) reveals skewing of stamp during loading, but it is unclear how to determine the settlement in the stamp center when the sensors are completely different at the moment of warping. The German technique with a single displacement sensor [1, 7] (Fig. 1, c) is much simpler but does not take into account the stamp warping. The use of the Ukrainian methodology [6] (Fig. 1, b) is not advisable at all, since the two displacement sensors do not allow keep a close watch on stamp warping.

The aim of work is to develop a mathematical model of the displacement of stamp points during static tests of road structures and to substantiate theoretically the necessary and sufficient number of sensors for stamp settlement measurements.

Results and Discussion. In the flat case of stamp displacement during its warping, it can be considered as a rotation at a certain angle α and a parallel transfer (Fig. 2).

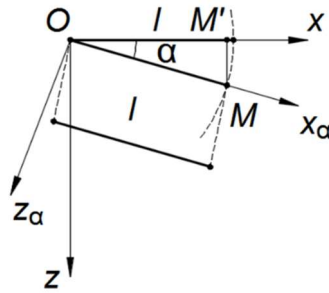


Figure 2 – Stamp replacement during its warping in a flat case

Рисунок 2 – Переміщення штамп при перекосі в плоскому випадку

Then in the system xOz the coordinates of point M :

$$\begin{aligned} x_M &= l \cdot \cos \alpha, \\ z_M &= l \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

If $\alpha \ll 1$, then:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \alpha, \\ \cos \alpha &= 1, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

hence $OM = l$.

In this case, the settlement in the stamp center can be calculated by equation:

$$S_i = \frac{S_{i_1} + S_{i_2} + S_{i_3}}{3}, \quad (3)$$

where $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}$ – readings of displacement sensors arranged as shown in Fig. 1, a.

In this case, the parallel transfer is not very interesting because all the points move by the same value.

In the more general case, when the point M does not lie on the Ox or Oz axis (Fig. 3):

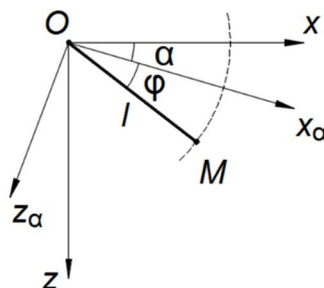


Figure 3 – Coordinate conversion when axes are rotated

Рисунок 3 – Перетворення координат при повороті осей

Hence:

$$\begin{aligned}x_{\alpha} &= l \cdot \cos \varphi, \\z_{\alpha} &= l \cdot \sin \varphi, \\x &= l \cdot \cos(\alpha + \varphi), \\z &= l \cdot \sin(\alpha + \varphi).\end{aligned}\tag{4}$$

Then:

$$\begin{aligned}x &= x_{\alpha} \cdot \cos \alpha - z_{\alpha} \cdot \sin \alpha, \\z &= x_{\alpha} \cdot \sin \alpha + z_{\alpha} \cdot \cos \alpha.\end{aligned}\tag{5}$$

Denote the matrix:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; X_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ z_{\alpha} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.\tag{6}$$

Then we have the matrix equation:

$$X = A \cdot X_{\alpha}.\tag{7}$$

Matrix A is not degenerate, so it has an inverse matrix that can be represented as:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.\tag{8}$$

Then

$$x_{\alpha} = A^{-1} \cdot x,\tag{9}$$

or we can write:

$$\begin{aligned}x_{\alpha} &= x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha, \\z_{\alpha} &= -x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha.\end{aligned}\tag{10}$$

In fact, the stamp can rotate not only around the Oy axis, but also around the Ox axis (Fig. 4).

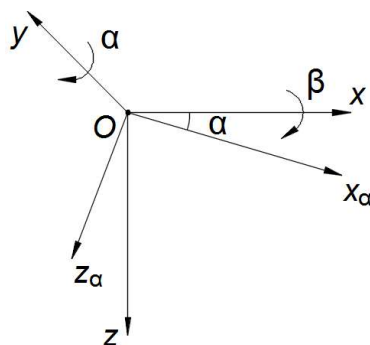


Figure 4 – Stamp replacement during its warping in a spatial case

Рисунок 4 – Переміщення штампа при перекосі в просторовому випадку

In this case, the results of 3D modeling of stamp warping in the PC «AutoCAD» indicate that in this case, the dependence (3) will already be incorrect (Fig. 5).

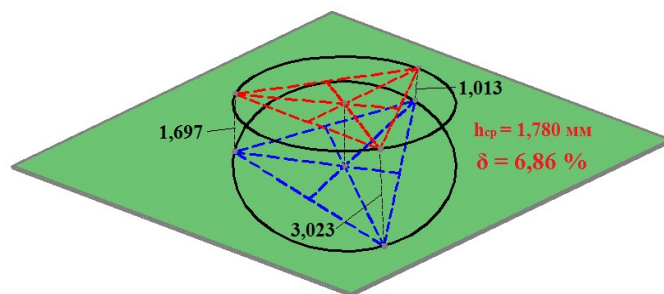


Figure 5 – Results of 3D simulation of stamp warping in PC «AutoCAD»

Рисунок 5 – Результати 3D моделювання перекосу штампа в ПК «AutoCAD»

Then we can get equations similar to (5) and (10) to move from one coordinate system to another. The obtaining formulas will include both angle α and angle β .

In practice, it is very difficult to determine which angle the stamp will return with respect to the Ox axis and relative to the Oy axis (Fig. 6), since the behavior of the stamp is completely unpredictable.



Figure 6 – Stamp warping at soil base tests conducting

Рисунок 6 – Перекос штампа при проведенні випробувань ґрунтової основи

Therefore, there are difficulties in solving the system of equations with two unknowns α and β . Therefore, let us consider another model of finding the stamp warping of central point O .

We assume that in the undeformed condition the stamp is in the plane $z = 0$, and at points A, B, C there are displacement indicators (Fig. 7).

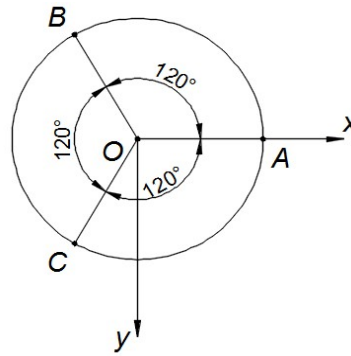


Figure 7 – The position of displacement indicators on the stamp in the deformed condition
Рисунок 7 – Положення індикаторів переміщення на штампі в недеформованому стані

From here we can determine the coordinates of points A , B and C in space. Under load, the stamp settles and warps. The points A , B , C are shifted in space along the axis of O_z by the values z_A , z_B , z_C respectively. These replacements are determining by indicators. It is known that through three points that do not lie on one line, you can draw a plane and only one. The equation of this plane can be written as:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Dividing the determinant by the elements of the first line we get:

$$(x - x_A) \cdot \begin{vmatrix} y_B - y_A & z_B - z_A \\ y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} - (y - y_A) \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & z_C - z_A \end{vmatrix} + (z - z_A) \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

or

$$\begin{aligned} & (x - x_A) \cdot ((y_B - y_A) \cdot (z_C - z_A) - (z_B - z_A) \cdot (y_C - y_A)) - \\ & - (y - y_A) \cdot ((x_B - x_A) \cdot (z_C - z_A) - (z_B - z_A) \cdot (x_C - x_A)) + \\ & + (z - z_A) \cdot ((x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (y_B - y_A) \cdot (x_C - x_A)) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Having opened the brackets, we obtain the equation of the plane, which can be written in the form:

$$A^* \cdot x + B^* \cdot y + C^* \cdot z + D^* = 0. \quad (14)$$

Before deformation, the points were lying on a plane $z = 0$, normal vector of that plane

$$\vec{n}_1 = \{0; 0; 1\}. \quad (15)$$

After deformation, the points have passed to the plane (2.14), normal vector of this plane

$$\vec{n}_2 = \{A^*; B^*; C^*\}. \quad (16)$$

The angle between planes $z = 0$ and (14) is equal to the angle between the vectors $\vec{n}_1$ and $\vec{n}_2$ (Fig. 8).

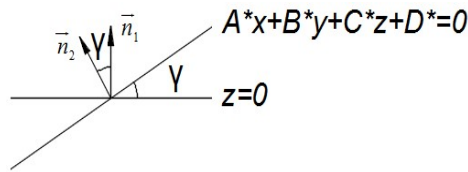


Figure 8 – Angle between stamp planes before and after warp

Рисунок 8 – Кут між площинами штамп до і після перекосу

Let's find this angle:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \quad (17)$$

Finding the dot product and the modules of corresponding vectors, providing that angle is sharp, we obtain:

$$\cos \gamma = \frac{|C^*|}{\sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}}}. \quad (18)$$

The plane of stamp before deformation $z = 0$ will intersect with the plane after deformation (14) along a straight line lying in the plane xOy (Fig. 9):

$$A^* \cdot x + B^* \cdot y + D^* = 0. \quad (19)$$

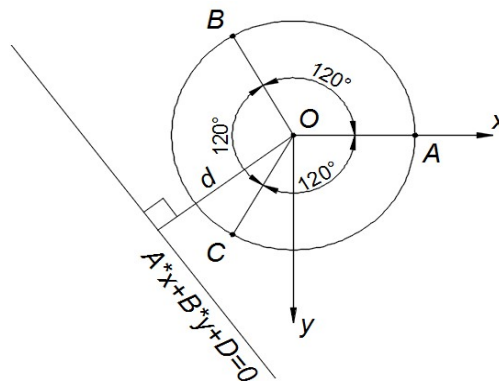


Figure 9 – The location of the intersection of two planes in the plane xOy

Рисунок 9 – Розташування прямої перетину двох площин в площині xOy

The distance from the stamp center point O in the undeformed condition to the straight line (19) is found by equation:

$$d = \frac{|A^* \cdot x_0 + B^* \cdot y_0 + D^*|}{\sqrt{A^{*2} + B^{*2}}}. \quad (20)$$

Accordingly, the settlement in the stamp center of the OO' will be:

$$OO' = d \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad (21)$$

Conclusions and Recommendations. Therefore, analyzing the presented research results, we can conclude that by suggested mathematical model using [8], it is possible to determine the settlement in the stamp center necessary to calculate the modulus of elasticity or deformation modulus, in which case the stamp will rotate around the axis Oy and around the Ox axis, and the angles of rotation α and β will be significant.

In the case when the stamp rotates only around the Ox or Oy axis, or when the angles α and β are insignificant, the dependence (3) is fair and the stamp settlement with sufficient engineering precision can be measured by a single displacement sensor mounted in the stamp center.

In order to estimate the angles values on which can actually rotate the stamp during warping, as well as to determine definitively enough sensors when making measurements, it is necessary to conduct experimental studies.

References

1. Kopf F., Adam D., Paulmichl I. Untersuchungen des dynamischen Lastplattenversuches mit dem Leichten Fallgewichtsgesetz unter Verwendung der Randelement-methode. *Österreichisch Ingenieur - und Architekten-Zeitschrift*. W., 2005. № 4–5. P. 116.
2. ÖNORM B 4417 (1978): Erd- und Grundbau. Untersuchung von Böden. Lastplattenversuch. Österreichisches Normungsinstitut, Wien.
3. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 11.061 (1975): Grundlagen. Bodenphysikalische Prüfverfahren. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
4. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 8.24 (1979): Erdarbeiten. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
5. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 8S.05.11 (1997): Oberbauarbeiten (ohne Deckarbeiten) Tragschichten. Ungebundene Tragschichten. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
6. Sporudy transportu. Dorozhnii odiah nezhorstkoho typu [Transport constructions. Flexible pavement type]. (2004). *VBN V.2.3-218-186-2004 from 1st January 2005*. Kyiv: Ukravtodor [in Ukrainian].
7. DIN 18134 (1990): Baugrund. Versuche und Versuchsgeräte. Platten-druckversuch. Deutsches Institut für Normung.
8. Shuliak, I.S. (2018). Matematychna model peremishen tochok shtampa pry statychnykh vyprovuvanniakh [Stamp points displacement mathematical model by static tests]. Abstracts of Papers: *LXXIV naukova konferentsiia profesorsko-vykladatskoho skladu, aspirantiv, studentiv ta spivrobotnykiv vidokremenykh strukturnykh pidrozdiliv Natsionalnoho transportnoho universytetu - LXXIV scientific conference of higher-education teaching personnel, postgraduates, students and staffers of structural divisions of National transport university*. (pp. 211). Kyiv [in Ukrainian].

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЕРЕМІЩЕНЬ ТОЧОК ШТАМПА ПРИ СТАТИЧНИХ ВИПРОБУВАННЯХ ДОРОЖНІХ КОНСТРУКЦІЙ

Шуляк Іван Станіславович, кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, доцент кафедри проектування доріг, геодезії та землеустрою, e-mail: i.s.shuliak@gmail.com, +380506437690, <https://orcid.org/0000-0003-0609-731X>

Сухоносів Сергій Олександрович, Державне підприємство «Науково-технічний центр «Дорожній контроль якості», заступник завідувача відділу нагляду за експлуатаційним станом доріг та безпеки руху, e-mail: s.o.sukhonosov@gmail.com, +380630637653, <https://orcid.org/0000-0001-5140-920X>

Чечуга Олександр Сергійович, кандидат технічних наук, доцент, Національний транспортний університет, доцент кафедри транспортного будівництва та управління майном e-mail: chechuga77@gmail.com, тел. +380662019442, Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, к. 138. <https://orcid.org/0000-0002-8074-6798>

Анотація. В різних методиках статичних штампових випробувань, як закордонних, так і українській, передбачено використання різної кількості датчиків переміщень для вимірювання осідання штампа.

Використання австрійської методики з трьома датчиками переміщень дозволяє виявити перекошування штампа при навантаженні, але незрозуміло, як визначити осідання в центрі штампа, коли показання датчиків в момент перекошування будуть абсолютно різними. Німецька методика з одним датчиком переміщення набагато простіша, але не враховує перекошування штампа. Використання української методики взагалі не доцільне, оскільки два датчики переміщень не дають змоги відслідкувати перекош штампа.

Стаття присвячена розробці математичної моделі переміщень точок штампа при статичних випробуваннях дорожніх конструкцій з теоретичним обґрунтуванням необхідної та достатньої кількості датчиків для проведення вимірювань осідання штампа.

Спочатку розглянуто переміщення штампа при перекоші в плоскому деформованому стані як поворот на деякий кут α і паралельний перенос.

Встановлено, що в такому випадку осідання штампа з достатньою для інженерної практики точністю можна виміряти одним датчиком переміщення, встановленим в центрі штампа.

В дійсності штамп може обертатися не тільки навколо осі Oy , а і навколо осі Ox . Тому, побудовано окрему математичну модель, яка описує процес переміщення штампа при перекоші в об'ємному деформованому стані.

Розроблена математична модель дає змогу визначити осідання в центрі штампа, необхідне для розрахунку модуля пружності чи модуля деформації, у випадку, коли штамп в момент перекошування буде обертатися як навколо осі Oy , так і навколо осі Ox , а кути повороту α та β будуть значними.

Ключові слова: дорожня конструкція, статичні штампові випробування, датчики переміщень, перекошування штампа, осідання в центрі штампа.

Перелік посилань

1. Kopf F., Adam D., Paulmichl I. Untersuchungen des dynamischen Lastplattenversuches mit dem Leichten Fallgewichtsgesetz unter Verwendung der Randelement-methode. *Österreichisch Ingenieur - und Architekten-Zeitschrift*. W., 2005. № 4–5. P. 116.
2. ÖNORM B 4417 (1978): Erd- und Grundbau. Untersuchung von Böden. Lastplattenversuch. Österreichisches Normungsinstitut, Wien.
3. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 11.061 (1975): Grundlagen. Bodenphysikalische Prüfverfahren. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
4. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 8.24 (1979): Erdarbeiten. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
5. Richtlinien und Vorschriften für den Straßenbau RVS 8S.05.11 (1997): Oberbauarbeiten (ohne Deckarbeiten) Tragschichten. Ungebundene Tragschichten. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen. Wien.
6. БН В.2.3–218–186–2004. Споруди транспорту. Дорожній одяг нежорсткого типу. [Чинний від 2005-01-01]. Вид. офіц. Київ : Укравтодор, 2004. 176 с.
7. DIN 18134 (1990): Baugrund. Versuche und Versuchsgeräte. Platten-druckversuch. Deutsches Institut für Normung.
8. Шуляк І. С. Математична модель переміщень точок штампа при статичних випробуваннях. Тези LXXIV наукової конференції професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів Національного транспортного університету (м. Київ, 16–18.05.2018 р.). Київ, 2018. С. 211.