

УДК 539.3  
UDK 539.3

DOI:10.33744/0365-8171-2025-117.2-420-429

СКЛАДНЕ ОБЕРТАННЯ ТОНКОСТІННОГО ОДНОПОРНОГО РОТОРА НА ПРУЖНОМУ  
ВАЛУ  
COMPLEX ROTATION OF A THIN-WALLED SINGLE SUPPORT ROTOR ON AN ELASTIC  
SHAFT



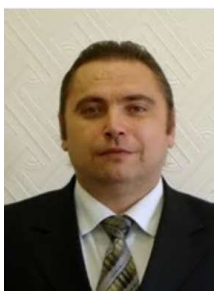
*Ло́за Ігор Андрійович*, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки. Київ, Україна, e-mail: [lozaigor1956@gmail.com](mailto:lozaigor1956@gmail.com),

<https://orcid.org/0000-0002-2678-6908>



*Мельник Всеволод Михайлович*, кандидат фізико-математичних наук, Національний транспортний університет, кафедра теоретичної та прикладної механіки. Київ, Україна, e-mail: [melnzema@gmail.com](mailto:melnzema@gmail.com),

<https://orcid.org/0009-0005-0588-7645>



*Соловій Ігор Леонідович*, кандидат технічних наук, доцент, Національний транспортний університет, кафедра теоретичної та прикладної механіки. Київ, Україна, e-mail: [i.soloviov@ntu.edu.ua](mailto:i.soloviov@ntu.edu.ua),

<https://orcid.org/0000-0001-5203-4139>



*Худолій Сергій Миколайович*, кандидат технічних наук, доцент, Національний транспортний університет, кафедра вищої математики. Київ, Україна, e-mail: [s\\_hoodolii@i.ua](mailto:s_hoodolii@i.ua),

<https://orcid.org/0000-0001-6054-6708>

**Анотація.** Ротори сучасних літальних апаратів зазвичай створюються у вигляді комбінації пружних валів, тонкостінних дисків, оболонки і тонких закручених лопаток. Особливості динамічної поведінки пружних систем, які обертаються, пов'язані з тим, що їх елементи при коливаннях одночасно беруть участь у різних видах рухів і на них діють позиційні сили інерції, що залежать від розташування елемента, та гіроскопічні сили інерції, зумовлені взаємодією обертальних і лінійних складових руху.

Умова  $\omega \gg \omega_0$  дозволяє шукати розв'язок в два етапи. На першому етапі ротор здійснює просте обертання навколо своєї осі симетрії з постійною по модулю кутовою швидкістю  $\omega$ . На другому етапі, який зумовлений плоским примусовим поворотом осі обертання, на елементи ротора діють сили інерції, які збуджують малі прецесійні коливання оболонки відносно початкового напруженого стану.

В процесі розв'язування задачі ротор умовно розбивається на окремі складові оболонки, для кожної з яких розв'язується система лінійних диференціальних рівнянь за допомогою методу початкових параметрів, а частинні розв'язки рівнянь знаходяться методом Рунге - Кутта четвертого порядку та додатково застосовується модифікована процедура ортогоналізації. Початкові умови для кожної оболонки визначаються з граничних умов та рівнянь спряження суміжних оболонкових елементів в місцях розгалуження.

Аналіз отриманих результатів свідчить про можливість виникнення резонансних режимів періодичних рухів. Встановлено що даний ротор має два резонансні режими руху, знайдено частоти цих режимів. Показано, що в околі резонансних кутових швидкостей загальний гіроскопічний момент, що діє у випадку складного обертання з боку пружного ротора на несуче тіло, може значно відрізнятись від відповідного моменту, який знайдено для твердого тіла геометрично еквівалентного ротору.

**Ключові слова:** тонкостінний ротор, складне обертання, прецесійні коливання, резонанс, напружено-деформований стан, складені оболонки.

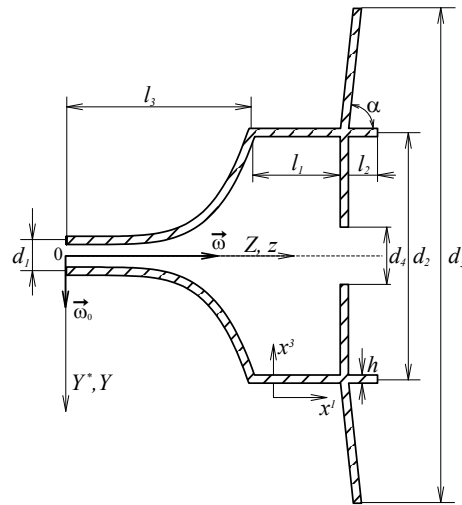
**Вступ.** Під час експлуатації літальних апаратів на їх ротори діють різні нестационарні навантаження, що зумовлені дією аеродинамічних сил, високотемпературних полів та загальною вібрацією системи. Ротори двигунів сучасних літальних апаратів зазвичай створюються у вигляді комбінації пружних валів, тонкостінних дисків, оболонок і тонких закручених лопаток. Проблеми дослідження тонкостінних пружних роторів, що здійснюють складне обертання, виникають при теоретичному моделюванні динамічних процесів, що супроводжують зліт, посадку та маневри літальних апаратів. Постановка таких задач різко ускладнюється накладенням ефектів прискорених переносних, обертальних і пружних рухів і дії навантажень, викликаних неоднорідністю силових полів. Під час складних обертань виникають недисипативні сили Коріоліса, що залежать від швидкості. Оскільки ці сили є гіроскопічними, їх потужність дорівнює нулю, але вони істотно впливають на характер руху пружної системи, виключаючи можливість її коливань з однаковими фазами. У результаті генеруються так звані прецесійні коливання, які в системі координат, що пов'язана з ротором, мають вид гармонійної хвилі, яка біжить з кутовою швидкістю обертання в протилежному напрямку [1, 2, 3].

Поставлені задачі описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, коефіцієнти та праві частини яких залежать не лише від просторових координат, а також й від часу, тому для їх розв'язання необхідно розробити спеціальні чисельні алгоритми [1-5].

На сьогодні досліджено питання динамічної рівноваги та коливань оболонок при простому обертанні [2, 6-7]. Задачі прецесійних коливань тонких оболонок [1-4], лопаткового ротора [7-9] та одноопорного тонкостінного ротора при складному обертанні розглядаються в [3]. Дослідженню динаміки оболонок при нестационарному навантаженні присвячені роботи [1-4, 6-7, 10].

На цей час особливості динаміки складного обертання оболонкових конструкцій залишаються практично невивченими, тому задача теоретичного моделювання складного обертання тонкостінного ротора на пружному валу з врахуванням збудження його пружних прецесійних коливань є актуальною. Знання особливостей таких коливань дозволяє уникнути появи резонансних режимів вібрацій, знизити ймовірність руйнування елементів ротора літального апарата і поліпшити динамічні характеристики двигуна.

**Постановка задачі.** Будемо вважати, що оболонка з розгалуженим меридіональним перерізом на пружному валу, який моделюється тонкостінною оболонкою від'ємної гаусової кривизни (рис.1) обертається з постійною по модулю кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ , відносно осі симетрії  $Oz$ , яка, в свою чергу, здійснює примусовий плоский поворот з постійною швидкістю  $\bar{\omega}_0$ , за умов, що  $\omega \gg \omega_0$ .



**Рисунок 1** – Розрахункова схема ротора.  
**Figure 1** – The rotor design scheme.

Для моделювання пружних коливань оболонки, що зумовлені складним обертанням, введено праві системи координат:  $OX^*Y^*Z^*$  – інерційна система координат з початком у центрі лівого опорного контуру, вісь  $OY^*$  якої колінеарна вектору повороту  $\vec{\omega}_0$ ;  $0xyz$  – система координат, що зафіксована в основі та обертається;  $0XYZ$  – система координат, вісь  $0Y$  якої збігається з віссю  $0Y^*$ , а вісь  $0Z$  – з віссю  $0z$ . На серединній поверхні оболонки введено ортогональну криволінійну систему координат  $0_1x^1x^2x^3$ , у якій координатна лінія  $x^1$  лежить в твірному перерізі,  $x^2$  спрямована в окружному напрямку,  $x^3$  – по внутрішній нормалі до поверхні оболонки

**Основна частина.** Динамічна рівновага оболонкового елемента в системі координат  $0xyz$  визначається рівняннями [1-4]

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \sqrt{a} h \gamma \vec{a} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{a} \vec{M}^\alpha}{\partial x^\alpha} + (\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha) \sqrt{a} = 0 \quad (\alpha=1,2), \quad (1)$$

де  $a$  – фундаментальний визначник метричного тензора;

$\vec{T}^\alpha$  – вектор внутрішніх сил;

$\vec{M}^\alpha$  – вектор внутрішніх моментів;

$\vec{a}$  – вектор абсолютного прискорення;

$h$  – товщина оболонки;

$\gamma$  – густина її матеріалу;

$\vec{e}_\alpha$  – вектори основного локального базису.

Вектор абсолютного прискорення  $\vec{a}$  визначається за формулою

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c. \quad (2)$$

Для обчислення векторів переносного  $\vec{a}_e$ , відносного  $\vec{a}_r$  і коріолісового  $\vec{a}_c$  прискорень, що входять в (2), використовуються співвідношення

$$\vec{a}_e = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}), \quad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times d\vec{\rho}/dt, \quad \vec{a}_r = d^2\vec{\rho}/dt^2, \quad (3)$$

де  $\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{u}$  – радіус - вектор точки елемента деформованої оболонки в рухомій системі координат  $Oxyz$ ;

$\vec{R}$  – радіус - вектор точки елемента недеформованої оболонки в цій системі координат;

$\vec{u}$  – вектор переміщень елемента оболонки;

$\vec{\Omega}$  – вектор абсолютної кутової швидкості системи відліку  $Oxyz$ ;

$\vec{\varepsilon}$  – вектор кутового прискорення цієї системи.

Не враховуючи величини більш високого порядку малості, вектор абсолютного прискорення в основному локальному базисі набуває вигляду

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left[ -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \right. \\ & \left. + \omega^2 u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - 2\omega \dot{u}_2 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} + \ddot{u}_1 / a_{11} \right] \cdot \vec{e}_1 + \\ & \left[ -\omega^2 u_2 / a_{22} + 2\omega \dot{u}_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \dot{u}_3 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}} + \ddot{u}_2 / a_{22} \right] \cdot \vec{e}_2 + \\ & \left[ \omega^2 r \cos \varphi + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \sin \varphi + \omega^2 u_1 \cos \varphi \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - \right. \\ & \left. - \omega^2 u_3 \cos^2 \varphi + 2\omega \dot{u}_2 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}} + \ddot{u}_3 \right] \cdot \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\varphi$  – кут між дотичною до твірної оболонки і віссю обертання,

$r = r(x^1)$  – відстань від осі обертання до розглянутого елемента,

$a_{ii}$  – коефіцієнти першої квадратичної форми оболонки,

$u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$  – компоненти вектора переміщень  $\vec{u} = u_s \vec{e}^s = u_\alpha \vec{e}^\alpha + u_3 \vec{n}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) та їх похідні за часом.

Умова  $\omega \gg \omega_0$  дозволяє шукати розв'язок в два етапи. На першому етапі ротор здійснює просте обертання навколо своєї осі симетрії з постійною по модулю кутовою швидкістю  $\omega$ . На другому етапі, який зумовлений плоским примусовим поворотом осі обертання, на елементи ротора діють сили інерції, які збуджують малі прецесійні коливання оболонки відносно початкового напруженого стану. Вигляд прискорення  $\vec{a}$  дозволяє подати шукані функції у формі гармонійних хвиль, що біжать в окружному напрямку [1-4]

$$\begin{aligned} \Delta T^{11} = T^{(11)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), \quad \Delta T^{12} = T^{(12)}(x^1) \cos(\omega t + x^2), \quad \Delta T^{22} = T^{(22)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), \\ \Delta T^{13} = T^{(13)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), \quad \Delta T^{23} = T^{(23)}(x^1) \cos(\omega t + x^2), \\ \Delta u_1 = u_{(1)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), \quad \Delta u_2 = u_{(2)}(x^1) \cos(\omega t + x^2), \quad \Delta u_3 = u_{(3)}(x^1) \sin(\omega t + x^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Заміна (5) дає змогу виключити з (1) фазову координату  $\omega t + x^2$ , а також похідні по  $x^2, t$  та побудувати систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно шуканих функцій з незалежною змінною  $x^1$ .

В процесі розв'язування задачі ротор умовно розбивається на окремі складові оболонки, для кожної з яких розв'язується система лінійних диференціальних рівнянь за допомогою методу початкових параметрів, а частинні розв'язки рівнянь знаходяться методом Рунге - Кутта четвертого порядку [4-5]. Початкові умови для кожної оболонки визначаються з граничних умов та рівнянь спряження суміжних оболонкових елементів в місцях розгалуження. Для ротора рівняння спряження чотирьох оболонок для складного обертання буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
 u_{(1)}^{(1)} \cos \varphi_1 + u_{(3)}^{(1)} \sin \varphi_1 &= u_{(1)}^{(2)} \cos \varphi_2 + u_{(3)}^{(2)} \sin \varphi_2, & u_{(1)}^{(1)} \sin \varphi_1 - u_{(3)}^{(1)} \cos \varphi_1 &= u_{(1)}^{(2)} \sin \varphi_2 - u_{(3)}^{(2)} \cos \varphi_2, \\
 u_{(1)}^{(1)} \cos \varphi_1 + u_{(3)}^{(1)} \sin \varphi_1 &= u_{(1)}^{(3)} \cos \varphi_3 + u_{(3)}^{(3)} \sin \varphi_3, & u_{(1)}^{(1)} \sin \varphi_1 - u_{(3)}^{(1)} \cos \varphi_1 &= u_{(1)}^{(3)} \sin \varphi_3 - u_{(3)}^{(3)} \cos \varphi_3, \\
 u_{(1)}^{(1)} \cos \varphi_1 + u_{(3)}^{(1)} \sin \varphi_1 &= u_{(1)}^{(4)} \cos \varphi_4 + u_{(3)}^{(4)} \sin \varphi_4, & u_{(1)}^{(1)} \sin \varphi_1 - u_{(3)}^{(1)} \cos \varphi_1 &= u_{(1)}^{(4)} \sin \varphi_4 - u_{(3)}^{(4)} \cos \varphi_4, \\
 u_{(2)}^{(1)} &= u_{(2)}^{(2)}, & u_{(2)}^{(1)} &= u_{(2)}^{(3)}, & u_{(2)}^{(1)} &= u_{(2)}^{(4)}, & \mathcal{G}_{(1)}^{(1)} &= \mathcal{G}_{(1)}^{(2)}, & \mathcal{G}_{(1)}^{(1)} &= \mathcal{G}_{(1)}^{(3)}, & \mathcal{G}_{(1)}^{(1)} &= \mathcal{G}_{(1)}^{(4)}, \\
 T_{(1)}^{(11)} \cos \varphi_1 + \left( T_{(1)}^{(13)} - \sqrt{a_{(1)}^{22}} M_{(1)}^{(12)} \right) \sin \varphi_1 &= T_{(2)}^{(11)} \cos \varphi_2 + \left( T_{(2)}^{(13)} - \sqrt{a_{(2)}^{22}} M_{(2)}^{(12)} \right) \sin \varphi_2 + \\
 + T_{(3)}^{(11)} \cos \varphi_3 + \left( T_{(3)}^{(13)} - \sqrt{a_{(3)}^{22}} M_{(3)}^{(12)} \right) \sin \varphi_3 + T_{(4)}^{(11)} \cos \varphi_4 + \left( T_{(4)}^{(13)} - \sqrt{a_{(4)}^{22}} M_{(4)}^{(12)} \right) \sin \varphi_4, \\
 T_{(1)}^{(11)} \sin \varphi_1 - \left( T_{(1)}^{(13)} - \sqrt{a_{(1)}^{22}} M_{(1)}^{(12)} \right) \cos \varphi_1 &= T_{(2)}^{(11)} \sin \varphi_2 - \left( T_{(2)}^{(13)} - \sqrt{a_{(2)}^{22}} M_{(2)}^{(12)} \right) \cos \varphi_2 + \\
 + T_{(3)}^{(11)} \sin \varphi_3 - \left( T_{(3)}^{(13)} - \sqrt{a_{(3)}^{22}} M_{(3)}^{(12)} \right) \cos \varphi_3 + T_{(4)}^{(11)} \sin \varphi_4 - \left( T_{(4)}^{(13)} - \sqrt{a_{(4)}^{22}} M_{(4)}^{(12)} \right) \cos \varphi_4, \\
 T_{(1)}^{(12)} &= T_{(2)}^{(12)} + T_{(3)}^{(12)} + T_{(4)}^{(12)}, & M_{(1)}^{(11)} &= M_{(2)}^{(11)} + M_{(3)}^{(11)} + M_{(4)}^{(11)},
 \end{aligned} \tag{6}$$

де верхній індекс для  $u_{(i)}^{(j)}$ ,  $u_{(i)}^{(j)}$ ,  $u_{(i)}^{(j)}$ ,  $\mathcal{G}_{(i)}^{(j)}$  та нижній індекс для сил, моментів і кутів  $\varphi_i$  визначає номер розглянутої оболонки.

Особливість застосування викладеного вище підходу полягає в тому, що в зв'язку з наявністю у лінеаризованій системі рівнянь великих коефіцієнтів, що обумовлені обертанням оболонки, вона є жорсткою, а серед її частинних розв'язків є швидко зростаючі функції. Тому при побудові розв'язку додатково застосовується модифікована процедура ортогоналізації [1-5].

**Аналіз результатів обчислень.** На основі викладеної методики проведено чисельне моделювання прецесійних коливань одноопорного ротора. В розрахунках вважалося, що  $d_1=0,05\text{м}$ ,  $d_2=0,4\text{м}$ ,  $d_3=0,8\text{м}$ ,  $d_4=0,02\text{м}$ ,  $l_1=0,15\text{м}$ ,  $l_2=0,05\text{м}$ ,  $l_3=0,1\text{м}$ ,  $\alpha=84^\circ$ . Товщина кожного з оболонкових елементів ротора  $h=0,005\text{м}$ , коефіцієнт Пуассона матеріалу  $\nu=0,3$ , модуль пружності  $E=2,1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ , густина  $\gamma=7,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$ . Значення  $\omega$  змінювались в межах  $0 \leq \omega \leq 2500\text{ с}^{-1}$  із кроком  $\Delta\omega=25\text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0=1\text{ с}^{-1}$ .

Рівняння серединної поверхні пружного валу, диска та конуса в параметричній формі мають вигляд:

$$x = f(x^1) \cos x^2, \quad y = f(x^1) \sin x^2, \quad z = x^1, \quad f(x^1) = \frac{d_2 - d_1}{2l_3^5} \cdot (x^1)^5 + \frac{d_1}{2}, \tag{7}$$

$$x = \left( \frac{d_2}{2} - x^1 \right) \cos x^2, \quad y = \left( \frac{d_2}{2} - x^1 \right) \sin x^2, \quad z = 0, \tag{8}$$

$$x = \left( \frac{d_2}{2} + tg\alpha \cdot x^1 \right) \cos x^2, \quad y = \left( \frac{d_2}{2} + tg\alpha \cdot x^1 \right) \sin x^2, \quad z = x^1, \tag{9}$$

де  $\alpha$  – кут між твірною конічної оболонки та віссю симетрії. Для циліндричної оболонки  $\alpha=0$ .

Як відомо, інтегральною мірою динамічної поведінки механічної системи у випадку складного обертання є її гіроскопічний момент  $\bar{M}_g$ . Проява цього моменту для осесиметричного твердого тіла, яке обертається і вісь якого здійснює додатковий примусовий плоский поворот, пов'язана з виникненням в опорах тіла реакцій, що складають пари сил з моментом

$$\vec{M}_g = I_z \vec{\omega} \times \vec{\omega}_0. \quad (10)$$

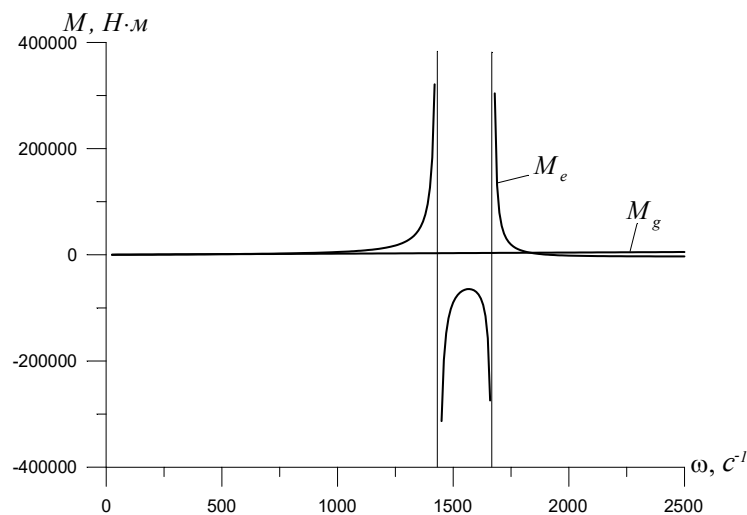
Тут  $I_z$  – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Породжені складним обертанням прецесійні коливання пружного ротора, супроводжуються виникненням в області його приєднання до твердого носія, який обертається, системи крайових пружних згинаючих та крутильних моментів і системи внутрішніх поздовжніх та перерізуючих зусиль, пружний результуючий момент  $\vec{M}_e$  яких можна подати у вигляді моменту пари з модулем

$$M_e = -T_{(13)} \pi d_1^2 / 4 \sin \varphi - T_{(11)} \pi d_1^2 / 4 \cos \varphi + M_{(11)} \pi d_1 / 2, \quad (11)$$

де  $T_{(13)}$ ,  $T_{(11)}$ ,  $M_{(11)}$  – фізичні компоненти амплітудних значень відповідних величин у місці жорсткого з'єднання торцевої конічної оболонки з твердим носієм,

$\varphi$  – кут між дотичною до твірної цієї оболонки і віссю симетрії в місцях защемлення.

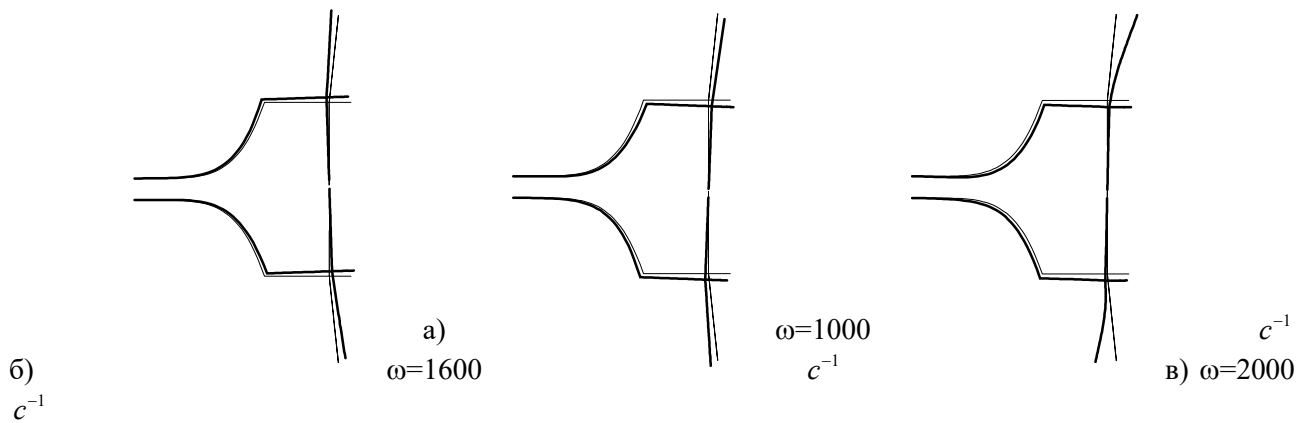


**Рисунок 2** – Залежності гіроскопічного ( $M_g$ ) та пружного ( $M_e$ ) моментів від кутової швидкості  $\omega$ .

**Figure 2** – Dependencies of the gyroscopic ( $M_g$ ) and elastic ( $M_e$ ) moments on angular velocity  $\omega$ .

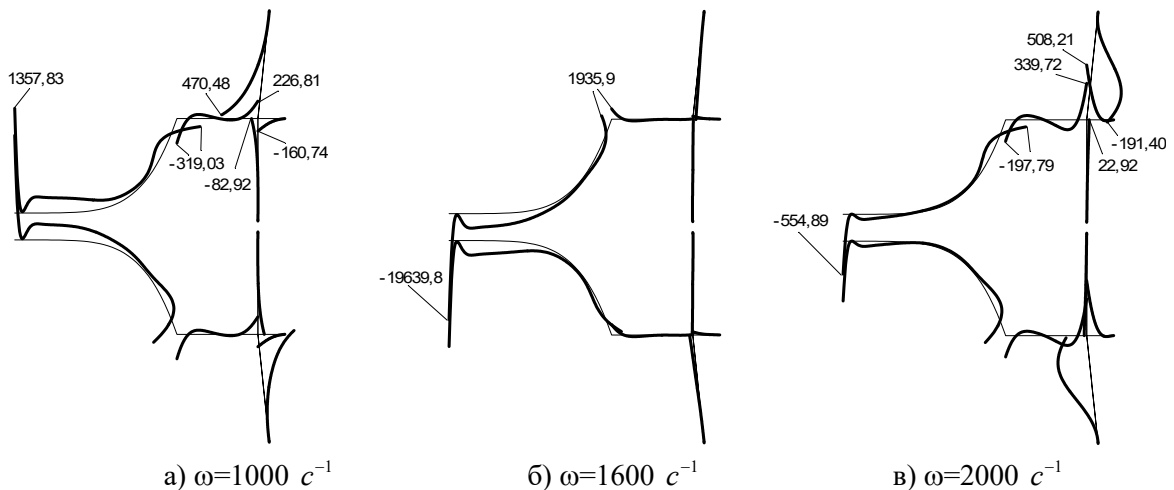
На рис. 2 зображено залежність цих моментів від кутової швидкості власного обертання  $\omega$ . Пружний момент  $M_e$  збігається з гіроскопічним  $M_g$  за умови невеликих значень кутової швидкості власного обертання  $\omega$  ( $0 < \omega < 1000 \text{ c}^{-1}$ ), коли сили інерції пружних коливань малі. Досягнутий збіг гіроскопічного та пружного моментів є необхідною умовою достовірності математичної моделі та правильності роботи обчислювальної системи. На розглянутому інтервалі зміни кутової швидкості власного обертання даний ротор має два резонансні режими руху при  $\omega_1 \approx 1425 \text{ c}^{-1}$  та  $\omega_2 \approx 1675 \text{ c}^{-1}$ , у яких  $M_e$  має розрив.

На рис. 3 показані форми прецесійних коливань ротора у перерізі площиною  $YOZ$  при різних значеннях кутової швидкості власного обертання. Слід зазначити той факт, що в цій площині пружні переміщення  $u_1$  і  $u_3$  елементів гіроскопічної системи набувають максимальних значень, а  $u_2$  дорівнює нулю. У перерізі ротора площиною  $XOZ$  пружні переміщення  $u_1$  і  $u_3$  його елементів дорівнюють нулю, а  $u_2$  приймає максимальне значення. З цих малюнків видно, що при переході через першу резонансну частоту фаза коливань ротора змінюється на протилежну, а при переході через другу змінюється сама форма коливань.



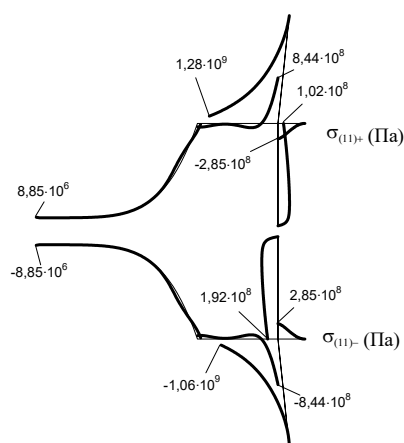
**Рисунок 3** – Форми прецесійних коливань ротора при різних значеннях кутової швидкості  $\omega$ .  
**Figure 3** – Modes of the precessional rotor vibrations at different values of the angular velocity  $\omega$ .

Епюри додаткових згинальних моментів в елементах ротора в перерізі площиною, що містить вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\omega}_0$  при різних значеннях  $\omega$  зображені на рис.4. Можна відзначити, що максимальне значення  $M_{(11)}$  приймає в місцях жорсткого приєднання ротора до твердого носія, що обертається. Зіставляючи ці малюнки, звернемо увагу на те, що при переході через резонансні частоти сильно видозмінюється форма епюр  $M_{(11)}$ . Це ще раз наголошує на складності явища прецесійних коливань.



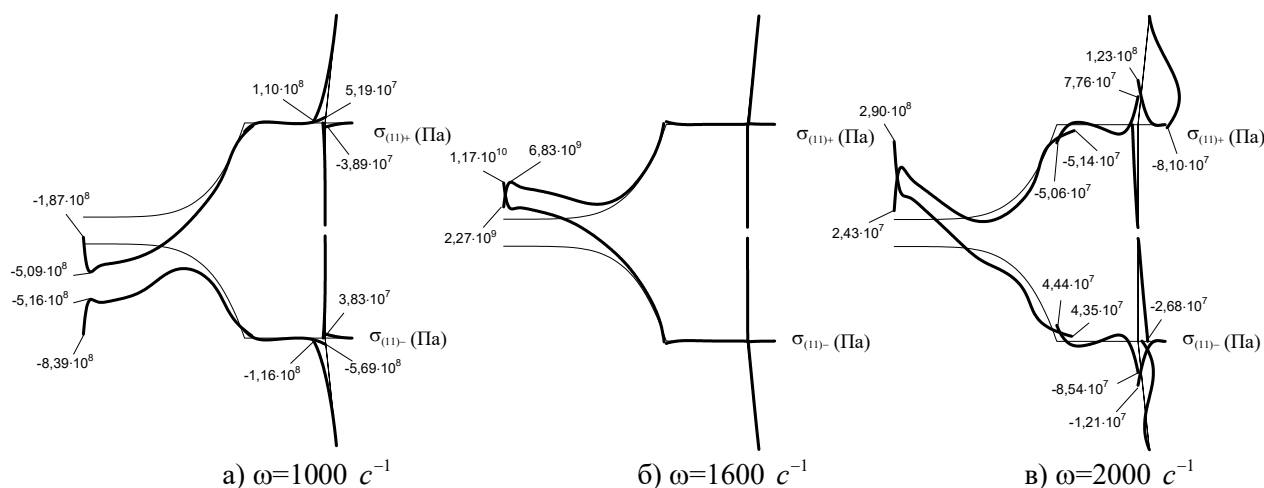
**Рисунок 4** – Епюри додаткових згинальних моментів при різних значеннях кутової швидкості  $\omega$ .  
**Figure 4** – Distribution of additional internal bending moments at different values of angular velocity  $\omega$ .

На рис. 5 показані епюри напружень, що виникають в елементах ротора від простого обертання при  $\omega=1000 \text{ c}^{-1}$ . Зі збільшенням  $\omega$  їх значення зростає пропорційно  $\omega^2$ . Зовсім інакше поведуться додаткові напруження, що характеризують примусовий поворот осі симетрії ротора. Епюри цих функцій за  $x^2 = \pi/2$  представлені на рис. 6. Звернемо увагу на те, що амплітудні значення додаткових напружень сильно змінюють свою форму при переході через резонансні частоти і перевершують напруження від простого обертання в місцях приєднання до твердого носія, що обертається.



**Рисунок 5** – Епюри напружень від простого обертання при  $\omega=1000 \text{ c}^{-1}$ .

**Figure 5** – Distribution of stresses caused by simple rotation at the value of the angular velocity  $\omega=1000 \text{ s}^{-1}$ .



**Рисунок 6** – Епюри додаткових напружень при різних значеннях кутової швидкості  $\omega$ .

**Figure 6** – Distribution of additional internal stresses caused by complex rotation at different values of angular velocity  $\omega$ .

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів свідчить про можливість виникнення резонансних режимів періодичних рухів. Показано, що в околі резонансних кутових швидкостей загальний гіроскопічний момент, що діє у випадку складного обертання з боку пружного ротора на несуче тіло, може значно відрізнятись від відповідного моменту, який знайдено для твердого тіла геометрично еквівалентного ротору.

#### Перелік посилань

1. Solov'ev I.L. Rotation of rigid and elastic cylindrical shells elastically coupled with a platform // International Applied Mechanics. – 2006. – 42(7). – P. 818-824.
2. Gulyayev V.I., Solov'ov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations // J. Sound and Vibrat. – 2004. – 270. – P. 323-339.
3. Gulyayev V.I., Lugovoj P.Z., Solov'ev I.L. Elastic vibrations of thin-wall one-support rotor (compound shell) under composite rotation // International Applied Mechanics. – 2003. – 39(8). – P. 969-975.

4. Gulyaev V.I., Lugovyy P.Z., Solovjov I.L. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation // *Journal of Sound and Vibration*. – 2001. – 246(3). – P. 491-504.
5. Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Loza I. A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. – Springer Nature Switzerland, 2021. – 227 p.
6. Chai Q., Wang Y. Q. A general approach for free vibration analysis of spinning joined conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. // *Thin-Walled Structures*. – 2021. – 168. – Article number 108243.
7. Zhao T.Y., Yan K., Li, H.W., Wang X. Study on theoretical modeling and vibration performance of an assembled cylindrical shell-plate structure with whirl motion. // *Applied Mathematical Modelling*. – 2022. – 110. P. – 618-632.
8. Gulyaev V.I., Solov'ev I.L., Khudolii S.N. Precession vibrations of the two-blade rotor with the elastic weightless shaft in compound rotation // *Strength of Materials*. – 2002. – 34(2). – P. 158-164.
9. Gulyaev V.I., Khudolii S.N. Vibrations of curved and twisted blades during complex rotation // *International Applied Mechanics*. – 2005. – 41(4). – P. 449-454.
10. Meish V.F., Galagan O.G., Mel'nik V.M. Nonaxisymmetric vibrations of conical shells of variable thickness under a nonstationary load // *International Applied Mechanics*. – 2014. – 50(3). – P. 295-302.

#### COMPLEX ROTATION OF A THIN-WALLED SINGLE SUPPORT ROTOR ON AN ELASTIC SHAFT

**Loza Igor A.**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Transport University, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, tel. +38(044) 286-38-89, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: [lozaigor1956@gmail.com](mailto:lozaigor1956@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-2678-6908>

**Mel'nik Vsevolod M.**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, National Transport University, assistant professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kyiv, Ukraine, tel. +38(044) 286-38-89, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: [melnzema@gmail.com](mailto:melnzema@gmail.com), <https://orcid.org/0009-0005-0588-7645>

**Solov'ev Igor L.**, Ph.D., associate Professor, National Transport University, assistant professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kyiv, Ukraine, tel. +38(044) 286-38-89, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: [i.soloviov@ntu.edu.ua](mailto:i.soloviov@ntu.edu.ua), <https://orcid.org/0000-0001-5203-4139>

**Khudolii Serhiy M.**, Ph.D., associate Professor, National Transport University, assistant professor of the Department of Higher Mathematics, Kyiv, Ukraine, tel. +38(044) 280-71-09, Ukraine, 01103, Kyiv, Boichuk str., 42, e-mail: [s\\_hoodolii@i.ua](mailto:s_hoodolii@i.ua), <https://orcid.org/0000-0001-6054-6708>

**Abstract.** The rotors of modern aircraft are usually created through a combination of elastic shafts, thin-walled disks, shells and thin twisted blades. Features of the dynamic behavior of elastic rotating systems are associated with the fact that their elements, when oscillating, simultaneously participate in various types of movements and are affected by positional inertia forces, depending on the location of the element, and gyroscopic inertia forces, caused by the interaction of rotational and linear components of motion.

The assumption  $\omega \gg \omega_0$  allows us to search for a solution in two stages. At the first stage, the rotor performs a simple rotation around its axis of symmetry with a constant angular velocity in absolute value. At the second stage, caused by a flat forced slewing of the axis of rotation, inertial forces act on the rotor elements, exciting small precessional vibrations of the shell relative to the initial stressed state.

In the process of solving the problem, the rotor is conditionally divided into individual components of the shell. For each part a system of linear differential equations is solved using the method of initial parameters, and partial solutions of the equations are found by the fourth order Runge–Kutta method, a modified orthogonalization procedure is additionally applied. The initial conditions for each shell are determined by the boundary conditions and equations of conjugation of adjacent shell elements at the branching points.

Analysis of the results obtained indicates the possibility of the emergence of resonant modes of periodic movements. It has been established that this rotor has two resonant modes of motion, and the frequencies of

these modes have been found. It is shown that in the vicinity of resonant angular velocities, the total gyroscopic moment acting in the case of complex rotation from the elastic rotor on the supporting body can differ significantly from the corresponding moment found for a rigid body geometrically equivalent to the rotor.

**Key words:** thin-walled rotor, complex rotation, precession vibrations, resonance, stress-deformed state, compound shells.

#### References

1. *Solov'ev I.L.* (2006). Rotation of rigid and elastic cylindrical shells elastically coupled with a platform. – *International Applied Mechanics*, 42(7), 818-824 [in English].
2. *Gulyayev V.I., Solov'ov I.L., Belova M.A.* (2004). Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. – *J. Sound and Vibrat.*, 270, 323-339 [in English].
3. *Gulyaev V.I., Lugovoj P.Z., Solov'ev I.L.* (2003). Elastic vibrations of thin-wall one-support rotor (compound shell) under composite rotation. – *International Applied Mechanics*, 39(8), 969–975 [in English].
4. *Gulyaev V.I., Lugovyy P.Z., Solov'ov I.L.* (2001). Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. – *Journal of Sound and Vibration*, 246(3), 491-504 [in English].
5. *Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Loza I. A.* (2021). Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. – Springer Nature Switzerland, 227 p. [in English].
6. *Chai Q., Wang Y. Q. A.* (2021). A general approach for free vibration analysis of spinning joined conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. – *Thin-Walled Structures*, 168, Article number 108243. [in English].
7. *Zhao T.Y., Yan K., Li, H.W., Wang X.* (2022). Study on theoretical modeling and vibration performance of an assembled cylindrical shell-plate structure with whirl motion. – *Applied Mathematical Modelling*, 110, 618-632 [in English].
8. *Gulyaev V.I., Solov'ev I.L., Khudolii S.N.* (2002). Precession vibrations of the two-blade rotor with the elastic weightless shaft in compound rotation. – *Strength of Materials*, 34(2), 158–164 [in English].
9. *Gulyaev V.I., Khudolii S.N.* (2005). Vibrations of curved and twisted blades during complex rotation. – *International Applied Mechanics*, 41(4), 449–454 [in English].
10. *Meish V.F., Galagan O.G., Mel'nik V.M.* (2014). Nonaxisymmetric vibrations of conical shells of variable thickness under a nonstationary load. – *International Applied Mechanics*, 50(3), 295-302 [in English].