УДК 539.3
UDC 539.3
DOI:10.33744/0365-8171-2023-114.1-065-075

РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ ДЛЯ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ ПОДАННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЛІНОМАМИ

CALCULATED RELATIONS OF THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD OF PRISMATIC BODIES FOR A FINITE ELEMENT BASED ON THE REPRESENTATION OF DISPLACEMENTS BY POLYNOMIALS

Кузьмінець Микола Петрович, *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: kuzminecmp@ukr.net, тел. +380983600812*

https://orcid.org/0009-0001-1841-694X

Максим'юк Юрій Всеволодович, *доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна,*

https://orcid.org/0000-0002-5814-6227

Мартинюк Іван Юрійович, *кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна,*

https://orcid.org/0000-0001-7957-2068

Анотація. У роботах [8, 10] розроблено варіант напіваналітичного методу скінченних елементів для розрахунку призматичних тіл при використанні в якості системи координатних функції рядів Фур'є. Застосування тригонометричних рядів забезпечує максимальну ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, однак, на торцях тіла вдається задовольнити лише граничним умовам, що відповідають спиранню об'єкта на абсолютно жорстку у своїй площині та гнучку діафрагму. В результаті виконаних досліджень отримані подання переміщень поліномами, що дозволяє значно розширити коло граничних умов на торцях тіла. У цьому випадку звести розв'язання вихідної просторової крайової задачі до послідовності двовимірних задач не є можливим, тому особливого значення набуває обґрунтований вибір відповідних поліномів. Від їх правильного вибору залежить як обумовленість матриці системи розв'язувальних рівнянь і, отже, збіжність інтеграційних алгоритмів її розв'язання, так і універсальність підходу щодо можливості задоволення різних варіантів граничних умов на торцях тіла.

Ключові слова. метод скінчених елементів; напіваналітичний метод скінчених елементів; призматичні тіла складної форми; скінчений елемент (СЕ1); призматичний скінчений елемент (СЕ2); теорія пружності; вузлові р2232й еакції; матриця жорсткості.

Постановка проблеми. Сучасний розвиток МСЕ характеризується прагненням до універсалізації алгоритмічних схем побудови розв'язувальних співвідношень за рахунок введення мінімуму вихідних припущень і гіпотез щодо реальних законів деформування. Накопичено значний досвід застосування до аналізу конструкцій просторових скінченних елементів дозволяють з єдиних позицій досліджувати масивні і тонкостінні об'єкти [1, 3-6, 14]. Як зазначено в роботі [7], такий підхід дозволяє охоплювати більш широкий клас практичних задач, усуваючи необхідність введення декількох видів СЕ, заснованих на різних вихідних рівняннях [2], що ускладнює правильний вибір розрахункової схеми, ускладнює формування умов контакту між окремими елементами і призводить до громіздкого обчислювального комплексу. У зв'язку з цим в даній роботі прийнята орієнтація на використання універсальних скінчених елементів.

До числа факторів, що визначають ефективність універсальних скінчених елементів, відноситься форма СЕ, закон розподілу переміщень і методика виведення матриці жорсткості.

Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості СЕ на основі представлення переміщень поліномами

Представлення переміщень у вигляді розкладання по поліномах наведено в роботі [9]. Виразивши у співвідношенні (1)

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,S_{(\alpha)}U_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}\,S_2+\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}\,S_1\right)U_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{8}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}U_{\gamma'(S_1,S_2),3}+2\,\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\,S_2U_{3'(S_1,S_2)}\right),$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\,U_{3'(S_1,S_2),3}, \tag{1}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}\,S_2+\\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,S_1S_2\end{pmatrix}U_{\gamma'(S_1,S_2)},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha3,(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}+\\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\,S_{(3-\alpha)}\end{pmatrix}U_{\gamma'(S_1,S_2),3}+\\ +\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\,S_1S_2U_{3'(S_1,S_2)}\end{matrix}\right\},$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\,S_\alpha U_{3'(S_1,S_2),3},$$

переміщення у відповідності з (2)

$$U_{n'} = \sum_{\iota=0}^{L} \bar{U}_{n'}^{\iota} \varphi^{(\iota)} \tag{2}$$

Отримаємо:

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(\alpha)} \varphi^{(\iota)} \bar{U}_{\gamma'(S_1,S_2)}^{\iota}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{12} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{4} \left(\overset{0}{Z}{}_{,1}^{\gamma'} S_2 + \overset{0}{Z}{}_{,2}^{\gamma'} S_1 \right) \varphi^{(\iota)} \bar{U}_{\gamma'(S_1,S_2)}^{\iota}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} \varphi_{,3}^{(\iota)} \bar{U}_{\gamma'(S_1,S_2)}^{\iota} + \\ +2 \overset{0}{Z}{}_{,3}^{3'} S_\alpha \varphi^{(\iota)} \bar{U}_{3'(S_1,S_2)}^{\iota} \end{pmatrix}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{4} \overset{0}{Z}{}_{,3}^{3'} \varphi_{,3}^{(\iota)} \bar{U}_{3'(S_1,S_2)}^{\iota}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}_{,12}^{\gamma'} S_\alpha + \\ +2 \overset{0}{Z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 \end{pmatrix} \varphi^{(\iota)} \bar{U}_{\gamma'(S_1,S_2)}^{\iota}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}_{,12}^{\gamma'} + \\ + \overset{0}{Z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} \varphi_{,3}^{(\iota)} \end{pmatrix} \bar{U}_{\gamma'(S_1,S_2)}^{\iota} + \right.$$

$$\left. + 2 \overset{0}{Z}{}_{,3}^{3'} S_1 S_2 \varphi^{(\iota)} \bar{U}_{3'(S_1,S_2)}^{\iota} \right] \tag{3}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{\iota=0}^{L} \frac{1}{2} \overset{0}{Z}{}_{3}^{3'} S_\alpha \varphi_{,3}^{(\iota)} \bar{U}_{3'(S_1,S_2)}^{\iota}$$

Зв'язок між коефіцієнтами розкладання деформацій до ряду Маклорена та коефіцієнтами розкладання переміщень по поліномах запишемо в матричній формі:

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{\bar{B}}_1\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\bar{B}}_2\right]\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_\iota$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{\bar{B}}_{1,1}\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\bar{B}}_{2,1}\right]\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_\iota \tag{4}$$

$$\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\} = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{\bar{B}}_{1,2}\right]\varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{\bar{B}}_{2,2}\right]\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_\iota$$

де

$$\left[\overset{0}{B}_1\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_1\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_1\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_1\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_1\right]^{(+1,+1)}\right]$$

$$\left[\overset{0}{B}_2\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_2\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_2\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_2\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_2\right]^{(+1,+1)}\right]$$

$$\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(+1,+1)}\right]$$

$$\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(+1,+1)}\right] \tag{5}$$

$$\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(+1,+1)}\right]$$

$$\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right] = \left[\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(-1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(+1,-1)} \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(-1,+1)} \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(+1,+1)}\right]$$

$$\left[\overset{0}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}, \left[\overset{0}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}, \left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(S_1,S_2)}, \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(S_1,S_2)}, \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(S_1,S_2)}, \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(S_1,S_2)},$$

Елементи підматриць і обчислюються згідно (3) і представлені матрицями 1-6 відповідно

$$\left[\overset{0}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_2 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\left[\overset{0}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1} & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1} & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2} & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_2+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_2+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1S_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1S_2 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1 \\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1 \end{pmatrix} & \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_1+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_1+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}S_1S_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3'}S_2 \\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}+ \\ +2\,\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Виразимо співвідношення

$$\delta\omega=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\begin{matrix} \left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}+ \\ +\frac{1}{12}\left[\begin{matrix} \left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}\right)\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}+ \\ +\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}\right)\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\} \end{matrix}\right] \end{matrix}\right\}\sqrt{\overset{0}{g}}\,dx^3 \tag{12}$$

коефіцієнтами розкладання деформацій до ряду Маклорена відповідно до (4). Тоді варіацію енергії можна надати через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах та вузлові реакції $\left\{\overset{0}{r}\right\}$ скінченого елемента

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right)\left\{\overset{0}{r}\right\}_{\iota} \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}\left\{\overset{0}{r}\right\}_{\iota} = &\Bigg[\left[\overset{0}{B}_1\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{0}{B}_2\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}dx^3 + \\ &+\frac{1}{12}\Bigg(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}dx^3 + \\ &+\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi^{(\iota)}dx^3 + \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}dx^3\Bigg)\Bigg]\sqrt{\overset{0}{g}}\end{aligned} \tag{14}$$

Виконавши в (14) чисельне інтегрування по x^3 відповідно до формули Гауса

$$\begin{aligned}\left\{\overset{0}{\sigma}_1\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \\ \left\{\overset{0}{\sigma}_2\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \\ \left\{\overset{0}{\sigma}_{1,1}\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \\ \left\{\overset{0}{\sigma}_{2,1}\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,1}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \\ \left\{\overset{0}{\sigma}_{1,2}\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \\ \left\{\overset{0}{\sigma}_{2,2}\right\}_{\iota} &= \sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\overset{0}{\sigma}_{,2}\right\}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)}\end{aligned} \tag{15}$$

отримуємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченого елемента з усередненими в перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ1) [9] через коефіцієнти розкладання напруги в ряд Маклорена:

$$\left\{\overset{0}{r}\right\}_\iota = \left[\left[\overset{0}{B}_1\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_1\right\}_\iota + \left[\overset{0}{B}_2\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_2\right\}_\iota + \frac{1}{12}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_{1,1}\right\}_\iota + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_{2,1}\right\}_\iota + \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_{1,2}\right\}_\iota +_\iota \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T \left\{\overset{0}{\sigma}_{2,2}\right\}\right)\right]\sqrt{\overset{0}{g}} \tag{16}$$

Представимо у співвідношенні

$$\delta\omega = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left[\overset{0}{D}\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}\right\} + \frac{1}{12}\left[\left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\}^T\right)\left[\overset{0}{D}_1\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,1}\right\} + \left(\delta\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}^T\right)\left[\overset{0}{D}_2\right]\left\{\overset{0}{\varepsilon}_{,2}\right\}\right]\right\}\sqrt{\overset{0}{g}}\,dx^3 \tag{17}$$

коефіцієнти розкладання деформацій у ряд Маклорена через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах:

$$\begin{aligned}\delta W = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=+1} &\left\{\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]^T \varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{B}_2\right]^T \varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\cdot\left[\overset{0}{D}\right]\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_1\right]\varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_n + \right.\\ &+\frac{1}{12}\left[\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T \varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T \varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\cdot\left[\overset{0}{D}_1\right]\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]\varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_n + \right.\\ &\left.\left.+\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T \varphi^{(\iota)} + \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T \varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\cdot\left[\overset{0}{D}_2\right]\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]\varphi^{(n)} + \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)\left\{\bar{U}\right\}_n\right]\right\}\sqrt{\overset{0}{g}}\,dx^3\end{aligned} \tag{18}$$

Запишемо вираз варіації у вигляді:

$$\delta W = \sum_{\iota=0}^{L}\sum_{n=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_\iota^T\right)\left[\overset{0}{K}\right]_{(\iota n)}\left\{\bar{U}\right\}_n \tag{19}$$

де коефіцієнти матиці жорсткості $\left[\overset{0}{K}\right]_{(\iota n)}$ призматичного скінченого елемента із усередненими у перерізі механічними та геометричними параметрами (СЕ2) визначаються за формулою:

$$\begin{aligned}\left[\overset{0}{K}\right]_{\iota n} = &\left[\left[\overset{0}{B}_1\right]^T\left[\overset{0}{D}\right]\left[\overset{0}{B}_1\right]G_1^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_2\right]^T\left[\overset{0}{D}\right]\left[\overset{0}{B}_1\right]G_2^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_1\right]^T\left[\overset{0}{D}\right]\left[\overset{0}{B}_2\right]G_3^{\iota n} + \right.\\ &\left[\overset{0}{B}_2\right]^T\left[\overset{0}{D}\right]\left[\overset{0}{B}_2\right]G_4^{\iota n} + \frac{1}{12}\left(\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T\left[\overset{0}{D}_1\right]\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]G_1^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T\left[\overset{0}{D}_1\right]\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]G_2^{\iota n} + \right.\\ &+\left[\overset{0}{B}_{1,1}\right]^T\left[\overset{0}{D}_1\right]\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]G_3^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]^T\left[\overset{0}{D}_1\right]\left[\overset{0}{B}_{2,1}\right]G_4^{\iota n} + + \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T\left[\overset{0}{D}_2\right]\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]G_1^{\iota n} + \\ &\left.\left.+\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T\left[\overset{0}{D}_2\right]\left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]G_2^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_{1,2}\right]^T\left[\overset{0}{D}_2\right]\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]G_3^{\iota n} + \left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]^T\left[\overset{0}{D}_2\right]\left[\overset{0}{B}_{2,2}\right]C_4^{\iota n}\right)\right]\sqrt{\overset{0}{g}}\end{aligned} \tag{20}$$

Висновки

Отримані формули для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості дозволяю використовувати для представлення переміщень різні системи координатних функцій, побудовані на основі поліномів. Відмінна особливість цих співвідношень у порівнянні з аналогічними, виведеними при використанні для подання переміщень рядів Фур'є, полягає в тому, що не рівні нулю коефіцієнти не тільки діагональних, але і периферійних підматриць і розв'язання систем рівнянь, що одержуються на їх основі, прямими методами стає недоцільним. До чинників, визначальних у разі ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, ставляться, насамперед, простота завдання умов закріплення на торцях тіла, і величина обсягу обчислень, обумовлена швидкістю збіжності інтеграційного процесу розв'язання систем рівнянь.

Перелік посилань

1. Баженов В.А. Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / В.А. Баженов, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк – Київ: Вид-во "Каравела", 2018. – 316с.

2. Баженов В.А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк – Київ: Вид-во "Каравела", 2021. – 280с.

3. Баженов В.А. Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування тіл з урахуванням великих пластичних деформацій / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк, І.І. Солодей, Р.Л. Стригун – Київ: Вид-во "Каравела", 2019. – 223с.

4. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.

5. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, І.І. Солодей– К. : КНУБА, 2012. – 248 с.

6. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – К. : «Каравела», 2014. – 236 с.

7. Ворошко П.П. К построению разрешающих соотношений МКЭ для задач теории упругости. Сообщение 1. – Проблемы прочности, 1981, № 10, с.76-78.

8. Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.

9. Максим'юк Ю. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченого елемента на основі представлення переміщень поліномами / Ю. Максим'юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 54–62.

10. Максим'юк Ю. Особливості виведення формул т для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108.

11. Максим'юк Ю.В. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл / Ю.В Максим'юк, І.І. Солодей, Р.Л. Стригун // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 252–262.

12. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.

13.Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 96. – С. 148–157. 161

14.Постнов В.А., Черенков Н.И. Расчет осесимметричной деформации толстых оболочек вращения с помощью метода конечных элементов. – Сб. НТО Судпрома, 1970, вып 149, с.19-28.

CALCULATED RELATIONS OF THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD OF PRISMATIC BODIES FOR A FINITE ELEMENT BASED ON THE REPRESENTATION OF DIS-PLACEMENTS BY POLYNOMIALS

Kuz′minets′ Mykola P., doktor tekhnichnykh nauk, profesor, zaviduvach kafedroyu komp'yuternoyi, inzhenernoyi hrafiky ta dyzaynu, Natsional′nyy transportnyy universytet, Kyyiv, Ukrayina, e-mail: kuzminecmp@ukr.net, tel. *+380983600812*, Ukrayina, 01103, m. Kyyiv, vul. M. Boychuka, 40 A. https://orcid.org/0000-0002-9636-919X

Maksym″yuk Yuriy V., doktor tekhnichnykh nauk, profesor, profesor kafedry budivel′noyi mekhaniky, Kyyivs′kyy natsional′nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyyiv https://orcid.org/0000-0002-5814-6227

Martynyuk Ivan YU., kandydat tekhnichnykh nauk, doktorant kafedry budivel′noyi mekhaniky, Kyyivs′kyy natsional′nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyyiv https://orcid.org/0000-0001-7957-2068

Abstract. In article [8, 10], a variant of the semi-analytical finite element method for the calculation of prismatic bodies was developed using the Fourier series function as a coordinate system. The use of trigonometric series ensures maximum efficiency of the semi-analytical finite element method, however, at the ends of the body it is possible to satisfy only the boundary conditions corresponding to the support of the object on an absolutely rigid in its plane and flexible diaphragm. As a result of the performed researches the basis of representation of movements by polynomials is received that allows to expand considerably a range of boundary conditions on end faces of a body. In this case, it is not possible to reduce the solution of the original spatial boundary value problem to a sequence of two-dimensional problems, so a reasonable choice of appropriate polynomials becomes especially important. Their correct choice depends on the conditionality of the matrix of the system of separate equations and, consequently, the convergence of integration algorithms for its solution, and the universality of the approach to the possibility of satisfying different variants of boundary conditions at the ends of the body.

Keywords. finite element method, semi-analytical finite element method; prismatic bodies of complex shape; finite element (FE1), prismatic finite element (FE2); theory of elasticity; nodal reactions; stiffness matrix.

References

1. Bazhenov V.A. Finite element method in problems of deformation and destruction of bodies of rotation under thermoforce loading / V.A. Bazhenov, S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksymiuk - Kyiv: "Caravela" Publishing House, 2018. - 316 p.
2. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in spatial problems of deformation, destruction and shape change of bodies of complex structure / V.A. Bazhenov, Yu.V. Maksymiuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksymiuk - Kyiv: "Caravela" publishing house, 2021. - 280 p.
3. Bazhenov V.A. Numerical modeling of the processes of nonlinear deformation of bodies taking into account large plastic deformations / V.A. Bazhenov, Yu.V. Maksymiuk, I.I. Solodei, R.L. Strigun - Kyiv: "Caravela" Publishing House, 2019. - 223p.
4. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in problems of destruction of spatial bodies: Monograph / V. A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov - K.: KNUBA, 2005. - 298 p.
5. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finite elements in problems of dynamics of spatial bodies: Monograph / V. A. Bazhenov, O.I. Gulyar, O.S. Sakharov, I.I. Solodei– K.: KNUBA, 2012. – 248 p.

6. Bazhenov V. A. Semi-analytical method of finished elements in the problems of continual destruction of expanses of bodies: Monograph / V.A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Piskunov, O.S. Sakharov - K .: "Karavela", 2014. - 236 p.

7. Voroshko P.P. To the construction of resolving relations of the FEM for problems of the theory of elasticity. Message 1. - Problems of Strength, 1981, No. 10, pp. 76-78.

8. Ivanchenko G.M. Construction of solving equations of semi-analytical method of finished elements of finished elements for prismatic bodies of complex share / G.M. Ivanchenko, Yu.V. Maksim'yuk, A.A. Kozak, I.Yu. Martinyuk // Management of development of folding systems: Nauk.-tekhn. sbirn. - K .: KNUBA, 2021 - Vip.46 - S. 55-62.

9. Maksim'yuk Yu. Vuzlovi reactions and coefficients of the density matrix of the reduced element based on the representation of displacement by polynomials / Yu. Maksim'yuk, O. Shkril, I. Martinyuk, V. Buchko // Budivelni konstruktsiï teoriya i praktika. - 2021. - VIP. 9. – P. 54–62.

10. Maksim'yuk Yu. Features of derivation of formulas for calculation of nodal reactions and coefficients of matrix of rigidity of a finite element with averaged mechanical and geometrical parameters / Yu. Maksim'yuk, A. Kozak, I. Martinyuk, O. Maksimyuk // Budivelni konstruktsiï teoriya i praktika. - 2021. - VIP. 8. – P. 97–108.

11. Maksim'yuk Yu.V. Vihidni svivvidshenija neliniynogo dininaiy sformininini visesimetrichnyh i ploskodformivnih til / Yu.V Maksim'yuk, I.I. Solodey, R.L. Strigun // Opir materials and theory of spores - 2019. - VIP. 102. - S. 252-262.

12. Maksim'yuk Yu.V. Rozrakhunkovi spivvidnenja universal skinchennogo elementa na osnovi ï scheme skichenih elementiv / Yu.V Maksim'yuk // Opir materials and teoriya sporud - 2015. - Вип. 94. - S. 244-251.

13. Maksim'yuk Yu.V. Clutch element of the head type for the decoupling of a weight-symmetric problem of non-stationary heat conduction / Yu.V Maksimyuk // Opir materials and theory of spores - 2016. - Vip. 96. - S. 148-157. 161

14. Postnov V.A., Cherenkov N.I. Calculation of axisymmetric deformation of thick shells of revolution using the finite element method. - Sat. NTO Sudprom, 1970, issue 149, pp. 19-28.