

**ЕФЕКТИВНІСТЬ АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

**EFFICIENCY OF THE ALGORITHM FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS BASED ON EXTRAPOLATION OF DISPLACEMENTS**



*Кузьмінець Микола Петрович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [kuzminecnp@ukr.net](mailto:kuzminecnp@ukr.net), тел. +380983600812, Україна, 01103, м. Київ, вул. М. Бойчука, 40 А.*

<https://orcid.org/0000-0002-9636-919X>



*Максим'юк Юрій Всеволодович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна, e-mail: [maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua](mailto:maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua), тел. +380672309472, Україна, 03680, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31.*

<https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>



*Мартинюк Іван Юрійович, кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна, e-mail: [ivan.martinyuk@gmail.com](mailto:ivan.martinyuk@gmail.com), тел. +380960680029, Україна, 03680, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31.*

<https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

**Анотація.** Моделювання тривалих процесів фізично і геометрично нелінійного деформування потребує використання крокових алгоритмів. Такі алгоритми можуть бути побудовані на основі зазначеної викладеної в роботах [2-5, 8-10] ітераційної процедури. При його реалізації підвищення ефективності може бути здійснено шляхом зміни матриці жорсткості за рахунок переобчислення координат компонент тензора миттєвих жорсткостей пружнопластичного матеріалу або проведенням екстраполяції переміщень на наступному кроці розв'язання задачі. В зв'язку з цим в даній статті проведено дослідження достовірності і ефективності результатів розв'язання фізично і геометрично нелінійних задач із використанням вищезгаданих підходів. Це реалізовувалось шляхом розв'язання ряду тестових прикладів, і аналізом похибок відносно еталонних та експериментальних даних, та обчислювальні витрат, потрібних для розв'язання задач.

**Ключові слова:** фізично нелінійне деформування, геометрично нелінійне деформування, чисельні методи, деформації повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу, метод скінчених елементів (МСЕ), плоско-деформовані та вісесиметричні тіла, формозміння, в'язкопружнопластичність, покроковий алгоритм.

**Вступ.** Велику кількість просторових конструкцій представляють призматичні тіла, геометричні та фізико-механічні характеристики яких змінні за всіма трьома напрямками. Об'єкти виділеного класу використовуються як природні конструкції, вузли і деталі в будівництві та різних галузях машинобудування. Наприклад, до них відносяться фундаменти промислових та цивільних будівель, елементи перекриттів та покриттів, арочні греблі, кронштейни, різці, зуби косозубих коліс тощо [1, 6, 7, 9-11]. Деформування конструкцій, що розглядаються, відбувається під дією силових і температурних факторів, причому, через наявність суттєвих перепадів температур можлива зміна фізико-механічних характеристик матеріалу. На сучасному рівні розвитку техніки та технології в окремих елементах конструкцій допускається виникнення пластичних деформацій. Для ряду деталей у процесі експлуатації та виготовлення розвиток пластичних деформацій супроводжується суттєвою зміною первісної форми. Це характерно для процесів обробки металів тиском, наприклад, при виготовленні штампових підборів, протяжці смуг. Подальше вдосконалення конструктивних рішень розробки відповідальних вузлів і технологічних процесів багато в чому залежить від повноти та достовірності інформації про особливості зміни картини напружено-деформованого стану в процесі навантаження. У зв'язку з цим, розробка методів дослідження виділеного класу об'єктів є актуальною проблемою.

**Виклад основного матеріалу.** В загальному випадку при розв'язанні системи нелінійних рівнянь, використано кроковий алгоритм за параметрами навантаження і часу в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Кантаровича по формулі:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \left[ K^* \right]^{-1} \left( \{Q\}^m - \{R\}_n^m \right) \quad (1)$$

де  $\left[ K^* \right]$  – лінералізована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації з урахуванням корекції тензора пружних констант згідно формули (тензор миттєвих констант) і координат вузлів дискретної моделі по формулі  $z_m^\alpha = z_{m-1}^{\alpha'} + \Delta u_m^\alpha$ ;  $\{Q\}^m$ ,

$\{R\}_n^m$  – вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації. Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності, на початку кожної ітерації  $n$  кроку  $m$  компоненти тензора напружень  $(\sigma^{ij})_n^m$ , що входять до використовуваного в (1) вектора вузлових реакцій, обчислюються за формулою:

$$(\sigma^{ij})_n^m = (\sigma^{ij})_{n-1}^m + (\Delta \sigma^{ij})_n^m, \quad (2)$$

де  $(\Delta \sigma^{ij})_n^m$  – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука (3)

$$d\sigma^{ij} = \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e. \quad (3)$$

за величиною прирощення повних деформацій, які обчислюються за формулами (4), (5).

$$\left\{ \varepsilon \right\}^\circ = [\bar{B}] \{ u_{(s_1, s_2)} \}, \quad \left\{ \varepsilon_{,1} \right\}^\circ = [\bar{B}_1] \{ u_{(s_1, s_2)} \}, \quad \left\{ \varepsilon_{,2} \right\}^\circ = [\bar{B}_2] \{ u_{(s_1, s_2)} \}, \quad (4)$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u^{1'}_{(s_1, s_2)} \\ u^{2'}_{(s_1, s_2)} \end{matrix} \right\}. \quad (5)$$

Дійсні значення напружень  $(\bar{\sigma}^{ij})_n^m$ , при наявності фізично нелінійних деформацій, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій  $\{R\}_n^m$ , обчислюються за формулою:

$$(\bar{\sigma}^{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\bar{\sigma}^{ij})_n^m + (\bar{s}^{ij})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\bar{s}^{ij})_n^m, \quad (6)$$

де  $(\bar{s}^{ij})_n^m$  – компоненти девіатора напружень, що враховують наявність деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора  $(\bar{s}^{ij})_n^m$  тензора дійсних напружень, що входять до формули (6), при розв'язку задачі пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості  $\tau_s$  [1, 7, 9-10]:

$$(\bar{s}^{ij})_n^m = \left( S^{ij} \right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau} \quad (7)$$

де  $\tau = \sqrt{s_{ij} s^{ij}} / 2$  – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності  $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m$ :

$$(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left( 1 - \frac{\tau_s}{\tau_i} \right) (\bar{s}^{ij})_m / G_1. \quad (8)$$

При розв'язку задачі в'язкопружного деформування на кожній ітерації  $n$  кроку  $m$  компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$  також обчислюються за формулами (2), (6) з урахуванням наявності деформацій повзучості, в даному випадку виконуємо:

$$(\bar{s}^{ij})_n^m = (s^{ij})_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m, \quad (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (9)$$

де  $G_1 = E / (1 - 2\nu)$ ;  $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} [\xi_i^c(\sigma_i)]_n^m \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_n^m}$ ;

$\Delta t_m$  – величина кроку за часом.

Після виконання умови збіжності ітераційного процесу проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості  $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m$  і пошкоженості  $(\Delta \omega)_m$  із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин  $(\varepsilon_{ij}^c)_m$  і  $\omega_m$ :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij}^c)_m &= (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m, \\ \omega_m &= \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left( \Delta \dot{\omega} \right)_m \Delta t_m, \end{aligned} \quad (10)$$

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega \geq \omega^*, \quad (11)$$

де  $\omega^*$  – критичне значення параметра пошкоженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу,  $\omega^*=1$  [1, 7, 9].

При чисельному розв'язанні задачі в'язкопружнопластичності відповідно до викладеного алгоритму стан повного руйнування матеріалу  $\omega^*=1$  в дійсності не досягається. У зв'язку з цим, в чисельних розв'язках приймається  $\omega^* < 1$  ( $\omega^*=0,9$ ,  $\omega^*=0,95\dots 0,96$ ,  $\omega^*=0,99$ ).

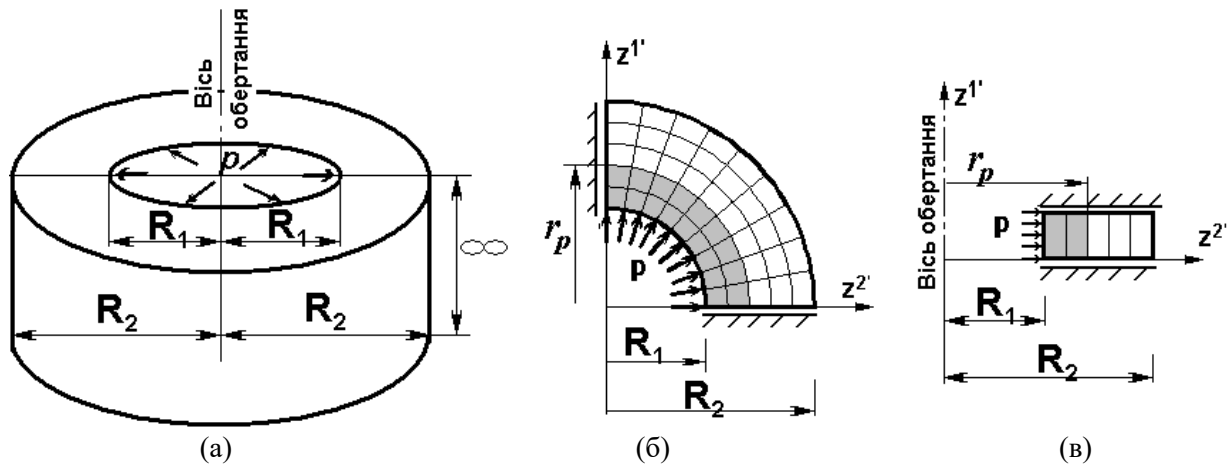
При одночасному розвитку деформацій пластичності і повзучості їх обчислення здійснюється за формулами (8), (9) послідовно.

Для зменшення обчислюваних витрат при розв'язку задач пружно-пластичності, пов'язаних з необхідністю перерахунку на кожному кроці коефіцієнтів матриці жорсткості, широко використовується спрощений алгоритм (12), з матрицею жорсткості, елементи якої обчислюються без урахування корекції тензора пружних постійних. Тоді формулу (1) можна записати у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (12)$$

де матриця  $[K]$  обчислюється один раз на першому кроці з використанням тензора пружних констант  $C^{ijkl}$ .

Для дослідження характеру збіжності і достовірності результатів, та порівняння ефективності використання викладених алгоритмів обчислення напружень при наявності деформацій пластичності розглянемо приклад про деформування нескінченної товстостінної труби під впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до  $p_{\max}=0.07$  МН/м<sup>2</sup>, характеристики матеріалу:  $E=1$  МПа,  $\nu=0.3$ , відношення межі текучості при чистому зсуві  $\tau_s$  до модуля пружності  $E$  становить 1:5.



**Рисунок 1.** Пружно-пластичне деформування товстостінної труби: розрахункова схема (а), дискретні моделі МСЕ (б, в)

**Figure 1.** Elastic-plastic deformation of a thick-walled pipe: design scheme (a), discrete FEM models (b, c)

Розрахунок проведено для фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до осі обертання поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням плоских (рис.1,б) вісесиметричних (рис.1,в) СЕ.

В таблиці 1 показано залежність величини максимального кільцевого напруження  $\sigma_{3'3'_{\max}}$  від інтенсивності внутрішнього тиску  $p$ .

**Таблиця 1** – Залежність величини максимального кільцевого напруження  $\sigma_{3'3'_{\max}}$  від інтенсивності внутрішнього тиску  $p$ .

**Table 1** - Dependence of the maximum annular stress  $\sigma_{3'3'_{\max}}$  on the internal pressure intensity  $p$ .

$p, \text{МН/м}^2$	0,037	0,051	0,059	0,064	0,07
$\sigma_{3'3'_{\max}}, \text{МПа [еталон]}$	0,0613	0,0648	0,0717	0,0795	0,0873
$\sigma_{3'3'_{\max}}, \text{МПа (1, 12)}$	0,0609	0,0644	0,0711	0,0789	0,0865
Похибка	0,64%	0,69%	0,83%	0,71%	0,91%

Протягом всього процесу деформування спостерігається збіг результатів, отриманих в вісесиметричній і плоскій постановках за розробленими алгоритмами, з розв'язком наведеним в книзі Соколовського.

При зростанні навантаження від 0 до  $p_1 = 0,037 \text{ МН/м}^2$  на внутрішній поверхні труби виникає зона пластичних деформацій (зона пластичності), діаметр якої збільшується із зростанням навантаження.

При розв'язанні задачі покрокове зміння навантаження  $p$  в інтервалі  $p_1 \leq p \leq p_{\max}$  проводилось так, щоб на кожному з кроків за навантаженням прирощення радіуса зони пластичності становило 1/5 товщини стінки труби ( $p_1 = 0,037, p_2 = 0,051, p_3 = 0,059, p_4 = 0,064, p_5 = p_{\max} = 0,07 \text{ МН/м}^2$ ) рис.2. Для дослідження збіжності отримуваних результатів розв'язання задачі здійснювалось при

вдвічі менших кроках за навантаженням. Розбіжність величин напружень і деформацій пластичності, одержаних у цих двох випадках становила менше 1%.

Як показали чисельні дослідження, незважаючи на зменшення обчислюваних витрат для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості, загальна ефективність алгоритму (12) виявилась значно гіршою порівняно з алгоритмом (1), що показано на графіках рис.3.

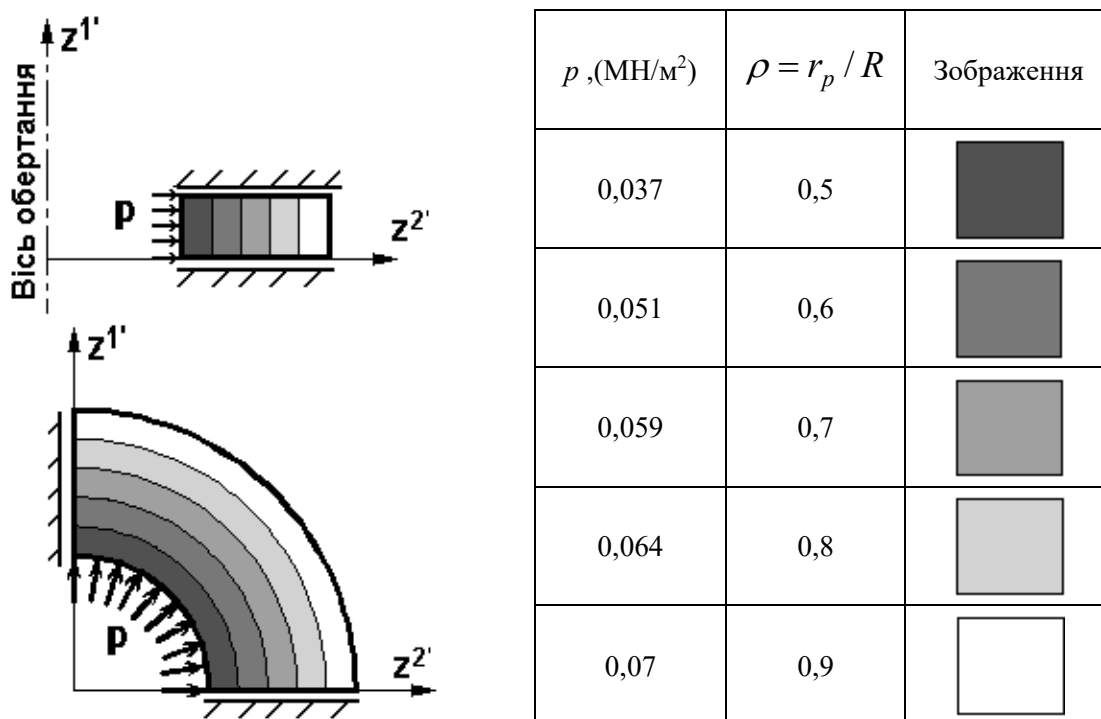


Рисунок 2. Розповсюдження зони пластичності в товстостінній трубі  
 Figure 2. Plasticity zone propagation in a thick-walled pipe

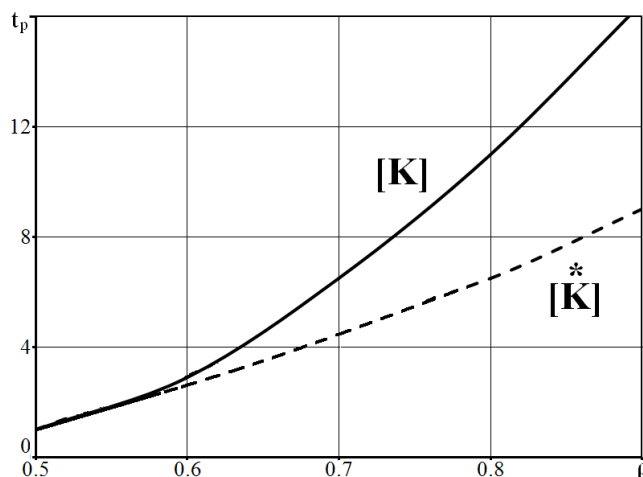


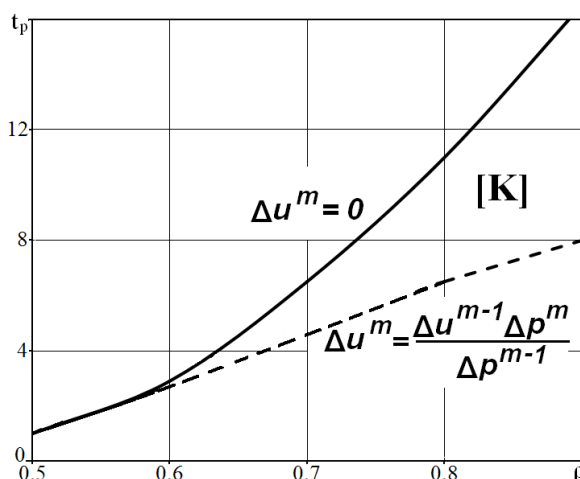
Рисунок 3. Пружно-пластичне деформування товстостінної труби: порівняння обчислювальних витрат при використанні алгоритму (1) і (12)  
 Figure 3. Elastic-plastic deformation of a thick-walled pipe: comparison of computational costs using algorithms (1) and (12)

Суттєво поліпшити ефективність алгоритму (12) дозволяє виконання процедури екстраполяції переміщень за формулою:

$$\{\Delta u^m\} = \frac{\{\Delta u^{m-1}\} \Delta p^m}{\Delta p^{m-1}}. \quad (13)$$

Величини напружень уточнюються на кожній ітерації кроку в залежності від поточного рівня деформацій пластичності і повзучості. В кінці кожного кроку здійснюється обчислення величини повних напружень на кроці  $m$ .

Ефективність розробленої модифікації алгоритму (12) з екстраполяцією переміщень по формулі (13) показано на (рис. 4) у вигляді графіків залежності кількості ітераційних затрат, необхідних для розв'язання задачі при різних розмірах зони пластичного деформування, границя якої відповідає координаті  $\rho = r_p / R$  (рис. 2), де  $R$  – зовнішній радіус циліндра. Як видно з наведених графіків екстраполяція переміщень суттєво зменшує обчислювальні витрати (12) і його ефективність не поступається алгоритму (1).



**Рисунок 4.** Ефективність розробленої модифікації алгоритму (12) з екстраполяцією.  
**Figure 4.** Efficiency of the developed modification of the algorithm (12) with extrapolation

Розв'язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість ітерацій розв'язання задачі МСЕ із застосуванням суміщення ітераційних процесів розв'язання нелінійної систем рівнянь дозволяє скоротити обчислювальні витрати майже на порядок (рис. 2).

В умовах повзучості, значення приросту вектора переміщень на « $m$ » кроці визначається таким чином:

$$\{\Delta u^m\} = \frac{\{\Delta u^{m-1}\} \Delta t^m}{\Delta t^{m-1}}. \quad (14)$$

Для дослідження ефективності розробленої модифікації алгоритму (12) з екстраполяцією переміщень при повзучості по формулі (14), розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах повзучості тонкостінної труби (рис. 5).

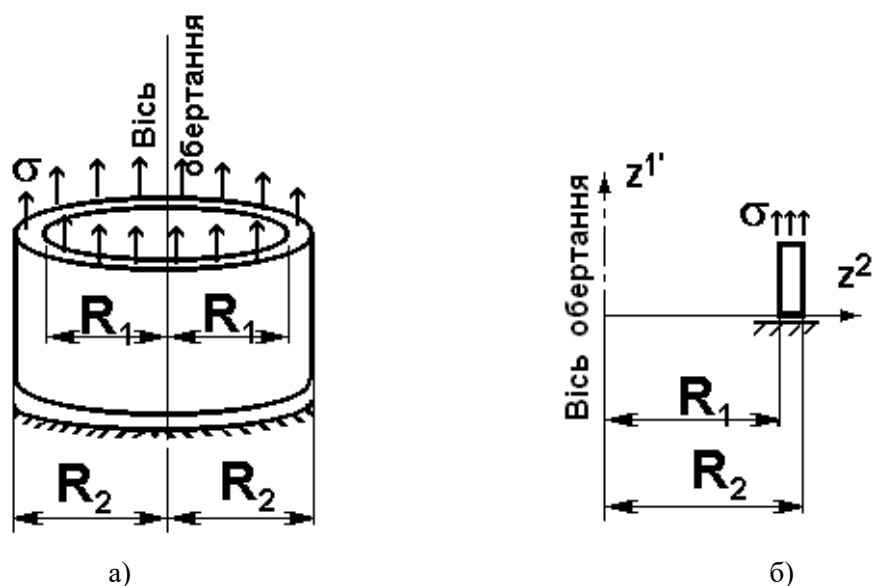


Рисунок 5. Тонкостінна труба: розрахункова схема (а), дискретна модель МСЕ (б)  
 Figure 5. Thin-walled pipe: design scheme (a), discrete FEM model (b)

Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (15)$$

де  $A = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$ ,

$k_1 = 2,36, c = 20,5 \text{ МПа}$ ,

$B = 0,58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3,17} \text{ год}^{-1}$ ,

$k_2 = 3,17$  – константи матеріалу, радіуси труби дорівнюють  $R_1 = 5,5 \text{ мм}$ ,

$R_2 = 6 \text{ мм}$ . Деформування відбувалося під впливом постійного розтягуючого навантаження, що створює в трубці напруження  $\sigma = 60 \text{ МПа}$ .

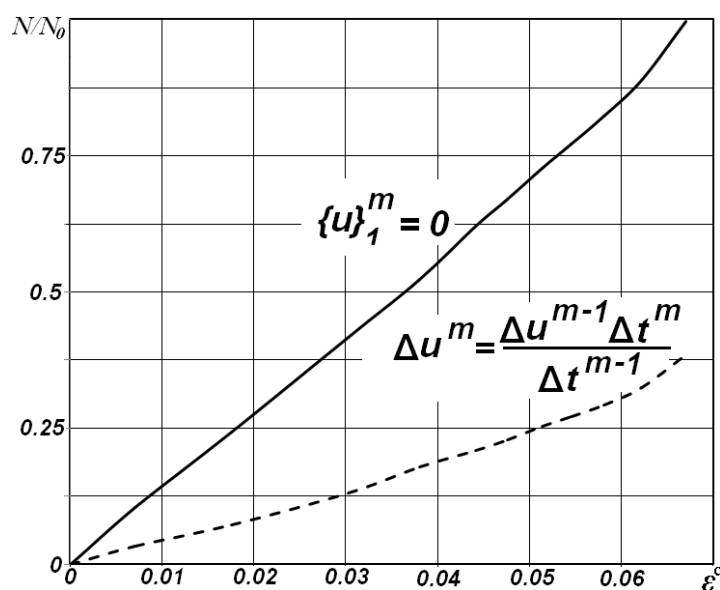
Величини деформацій повзучості, наведені в таблиці 2, добре узгоджуються з експериментальним результатом Локощенка та Шестиракова.

Таблиця 2 – Величини деформацій повзучості

Table 2 - Creep deformation values

$t$ , год	2,5	5	7,5	10	12,5
$\varepsilon_c$ % [експеримент]	0,625	1,270	2,221	3,603	5,000
$\varepsilon_c$ % (1),(12)	0,631	1,286	2,259	3,675	5,121
похибка	0,99%	1,28%	1,72%	2,00%	2,42%

Ефективність розробленої модифікації алгоритму (12) з екстраполяцією переміщень по формулі (15) показано на рис. 6 у вигляді графіків залежності кількості ітераційних затрат, необхідних для розв'язання задачі при різних значеннях деформацій повзучості  $\varepsilon_c$ .



**Рисунок 6.** Ефективність алгоритму (3.8), (3.10)  
**Figure 6.** The efficiency of the algorithm (3.8), (3.10)

Як видно, застосування початкового наближення прирощень переміщень дозволяє зменшити обчислювальні витрати в три рази.

**Висновки.** В статті представлений кроковий блочно-ітераційний алгоритм моделювання еволюційного процесу фізично- і геометрично нелінійного деформування, що ґрунтується на ітераційній процедурі Ньютона-Канторовича. Розглянуті модифікації алгоритма, згідно до яких розв'язання задачі проводиться або із обчисленою на кожному кроці матрицею жорсткості, компоненти якої враховують корекцію тензора пружних констант відповідно до властивостей пластичності і повзучості матеріалу, або із матрицею жорсткості, обчисленою за вихідними величинами тензора пружних констант та початковими наближеннями переміщень, на кожному кроці. Застосування зазначених модифікацій алгоритму має майже однакову ефективність і дозволяє зменшити обчислювальні витрати для розв'язання задач на основі МСЕ приблизно в два-три рази. Описані алгоритми розв'язання задач континуального руйнування дозволяють досліджувати процес зростання зон континуального руйнування з урахуванням пластичності, повзучості і накопичення пошкодженості матеріалу. Вірогідність отримуваних на основі розроблених алгоритмів результатів підтверджується їх збіжністю при послідовному збільшенні параметрів дискретних моделей, а також незначним відхиленням від отриманих іншими авторами експериментальних і чисельних результатів.

#### Перелік посилань

1. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / [Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.] – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
2. Баженов В.А. Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язко-пружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П. // Опір матеріалів і теорія споруд, № 78, 2006. – С.3-17.
3. Баженов В.А. Дослідження континуального, дискретного та дисперсного руйнування просторових тіл на основі напіваналітичного методу скінчених елементів / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Ільченко О.М, Рутковський В.А. // "Опір матеріалів і теорія споруд", 2002. – №70. – С.3-32.

4. Баженов В.А. Эффективность развязания пространственных задач теории повзучости / Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Рутковский В.А. // Опір матеріалів і теорія споруд № 74, 2004 С.3–13.
5. Баженов В.А. Напряжено-деформованный стан і формозмінення в тілах обертання складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 3–12.
6. Баженов В.А. Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання / Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Остапенко Р.М // Опір матеріалів і теорія споруд № 82, 2008. – С.3-29.
7. Баженов В. А. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / [Баженов В. А., Гуляр О. И., Пискунов С. О., Сахаров О. С.]. – К. : Каравела, 2014. – 235 с.
8. Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.
9. Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / [Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316с.
10. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / [Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2021. – 280с.
11. Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування тіл з урахуванням великих пластичних деформацій / [Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2019. – 223с.

#### **EFFICIENCY OF THE ALGORITHM FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS BASED ON EXTRAPOLATION OF DISPLACEMENTS**

**Mykola Kuzminets**, doktor tekhnichnykh nauk, profesor, zaviduvach kafedroyu komp'yuternoyi, inzhenernoyi hrafiky ta dyzaynu, Natsional'nyy transportnyy universytet, Kyiv, Ukrayina, e-mail: kuzminetsmp@ukr.net, tel. +380983600812, Ukrayina, 01103, m. Kyiv, vul. M. Boychuka, 40 A. <https://orcid.org/0000-0002-9636-919X>

**Yuriy Maksymyuk**, doktor tekhnichnykh nauk, profesor, profesor kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyiv's'kyu natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv <https://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

**Ivan Martynyuk**, kandydat tekhnichnykh nauk, doktorant kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyiv's'kyu natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv <https://orcid.org/0000-0001-7957-2068>

**Oleksandr Maksymyuk**, aspirant kafedry budivel'noyi mekhaniky, Kyiv's'kyu natsional'nyy universytet budivnytstva i arkhitektury, Kyiv <https://orcid.org/0000-0002-2367-3086>

**Summary.** Simulation of long-term processes of physically and geometrically nonlinear deformation requires the use of step algorithms. Such algorithms can be constructed on the basis of the iterative procedure described in [2-5, 8-10]. When it is implemented, the efficiency can be increased by changing the stiffness matrix by recalculating the coordinates of the components of the instantaneous stiffness tensor of the elastoplastic material or by extrapolating the displacements in the next step solution of the problem. In this regard, this article conducts a study of the reliability and efficiency of the results of solving physically and geometrically nonlinear problems using the above-mentioned approaches. This was done by solving a number of test cases, and by analyzing the errors relative to the reference and experimental data, and the computational costs required to solve the problems.

**Keywords.** physically nonlinear deformation, geometrically nonlinear deformation, numerical methods, creep deformations taking into account material damage, finite element method (MSE), plane-deformed and axisymmetric solids, form change, viscoelasticity, step-by-step algorithm.

#### References

1. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Sakharov O.S.] Kyiv: KNUBA, 2005. – 298 p.
2. Bazhenov, V.A., Gulyar, O.I., Piskunov, S.O., Andrievsky, V.P. "Algorithm for solving the spatial problem of thermovisco-elastic plasticity of prismatic bodies taking into account damage" // Resistance of materials and theory of structures, No. 78, 2006. – P.3-17.
3. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Sakharov O.S., Ilchenko O.M., Rutkovsky V.A. // "Strength of Materials and Theory of Structures", 2002. – №70. – P.3-32.
4. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Rutkovsky V.A. // Resistance of Materials and Theory of Structures No 74, 2004 P.3–13.
5. Bazhenov V.A., Maksymiuk Yu.V. Stress-strain state and form-change in the bodies of rotation of a complex structure // Resistance of materials and theory of structures – 2019. – Vyp. 102, pp. 3–12.
6. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Ostapenko R.M. Calculated ratios of NMSE spatial problem of thermoviscoelasticity for inhomogeneous bodies of rotation / Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Ostapenko R.M. // Resistance of materials and theory of structures No 82, 2008. – P.3-29.
7. Bazhenov, V. A., Gulyar, O. I., Piskunov, S. O., Sakharov, O. S., [Bazhenov V. A., Gulyar O. I., Piskunov S. O., Sakharov O. S.]. Kyiv: Karavela, 2014. – 235 p.
8. Ivanchenko, H.M., Maksymiuk Yu.V., Kozak A.A., Martyniuk I.Yu. Born. – K.: KNUBA, 2021 – Issue 46 – P. 55-62.
9. Finite Element Method in Problems of Deformation and Destruction of Bodies of Rotation under Thermoforce Load / [Bazhenov V.A., Piskunov S.O., Maksymyuk Yu.V.] – Kyiv: Karavela Publishing House, 2018. – 316 p. (in Russian).
10. Semi-Analytical Method of Finite Elements in Spatial Problems of Deformation, Destruction and Shape Change of Bodies of Complex Structure / [Bazhenov V.A., Maksymyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksymiuk O.V.] – Kyiv: Karavela Publishing House, 2021. – 280 p.
11. Numerical modeling of the processes of nonlinear deformation of bodies taking into account large plastic deformations / [Bazhenov V.A., Maksymyuk Yu.V., Solodey I.I., Strigun R.L.] – Kyiv: Karavela Publishing House, 2019. – 223 p.