

**МЕТОДИКА ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ НАСИПІВ З УРАХУВАННЯМ ЇХ  
НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

**METHODOLOGY FOR ASSESSING THE STABILITY OF EMBANKS TAKING INTO  
ACCOUNT THEIR STRESSED STATE**



*Петровиц Володимир Володимирович, аспірант кафедри дорожньо-будівельних матеріалів і хімії, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: e-mail: [menor@ukr.net](mailto:menor@ukr.net), тел. +380930932262*

<https://orcid.org/0009-0002-1513-2789>



*Петровиц Ігор Володимирович, аспірант кафедри системного проектування об'єктів транспортної інфраструктури та геодезії, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [igor19932008@gmail.com](mailto:igor19932008@gmail.com), тел. +380663837188*

<https://orcid.org/0009-0008-3551-3718>



*Савенко Сергій Сергійович, аспірант кафедри транспортного будівництва та управління майном, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [sava0304@gmail.com](mailto:sava0304@gmail.com), тел. +380639570047.*

<https://orcid.org/0009-0007-2243-3471>



*Чечуга Євген Сергійович, аспірант кафедри транспортного будівництва та управління майном, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [Cecugazena2@gmail.com](mailto:Cecugazena2@gmail.com), тел. +3800937533521*

<https://orcid.org/0009-0008-6799-4843>



*Юрчук Віталій Васильович, аспірант кафедри міжнародних перевезень та митного контролю, Національний транспортний університет, Київ, Україна, e-mail: [urcukvitalij6@ukr.net](mailto:urcukvitalij6@ukr.net), тел. +380966611626*

<https://orcid.org/0009-0008-8596-5296>

**Анотація.** У статті розглянуто питання оцінювання стійкості дорожніх насипів з урахуванням їх напружено-деформованого стану. На основі теорії міцності Мора–Кулона та результатів чисельного моделювання запропоновано критерій відносної міцності ґрунтів земляного полотна. Виконано аналіз напруженого стану еталонного насипу та визначено характер розподілу небезпечних зон у його поперечному перерізі. Показано можливість використання запропонованого показника для порівняльної оцінки стійкості насипів різної геометрії та виявлення потенційних поверхонь ковзання.

**Ключові слова:** дорожній насип, стійкість укосів, напружено-деформований стан, теорія Мора–Кулона, міцність ґрунтів, показник відносної міцності, поверхні ковзання, метод скінчених елементів

**Вступ.** На шляху до вироблення методики оцінки стійкості насипу з урахуванням її напруженого стану стояла низка взаємопов'язаних завдань, головними з яких є:

1. вибір певної теорії міцності, що узгоджується з основним положенням пропонованого підходу до дослідження стійкості ґрунтів насипу та залежності їх міцності від напруженого стану;
2. задання передумов з метою конкретизації цієї залежності;
3. обґрунтування критерію міцності, що задовільно описує близькість напруженого стану ґрунту земляного полотна до граничного (в умовах обмеженості вихідних даних).

Перше із зазначених завдань було вирішено вибором як вихідної узагальненої теорії міцності — теорії Мора, яка нині є однією з найбільш фізично обґрунтованих серед численних відомих теорій міцності. Вагомим аргументом на користь такого вибору є також той факт, що при розрахунку напруженого стану насипу методом скінчених елементів (МСЕ) розв'язувалася плоска задача, в якій не враховувалося (умовно приймалося сталим) напруження, що діє нормально до поперечного перерізу насипу, тобто збігається з одним із головних напружень, яке, згідно з теорією Мора, не впливає на міцність.

Основні аспекти теорії Мора–Кулона у застосуванні до залежності міцнісних характеристик ґрунтів від їх напруженого стану. Ґрунт у загальному випадку являє собою сукупність структурних елементів. Навіть у найпростішому випадку, коли розглядається робота зв'язків, що виникають у контакті між двома ізольованими структурними елементами, характер їх роботи та опір руйнуванню залежать від виду напружено-деформованого стану. Це зумовлено тим, що в реальних умовах навантаження, як правило, прикладається під деяким кутом до лінії зв'язку, унаслідок чого лише частина зусилля безпосередньо бере участь у її руйнуванні, тоді як інша частина може спричинити виникнення додаткових сил опору (наприклад, у вузлах тертя).

У випадку контакту між двома структурними елементами необхідно також враховувати, що в міру розвитку напруженого стану, який супроводжується пружними деформаціями, у роботу може включатися більша або менша кількість зв'язків, що зумовлює зміну їх сумарної міцності.

Для сукупності структурних елементів характерною є різна орієнтація зв'язків відносно рівнодіючої зовнішнього навантаження. Унаслідок цього окремі елементи перебувають у різних умовах напруження та деформації, що обумовлює функціональну залежність міцності ґрунту від напруженого стану.

Таким чином, при переході від аналізу опору взаємному зміщенню окремих структурних елементів до розгляду опору зовнішньому навантаженню масиву ґрунту в цілому виявляється залежність його міцності від умов напружено-деформованого стану, в якому він перебуває в процесі навантаження. Іншими словами, міцність ґрунту в загальному випадку є функцією його напруженого стану. Сучасні підходи до адаптивного управління транспортними потоками дозволяють зменшити пікові та імпульсні навантаження від руху транспорту, що позитивно впливає на напружено-деформований стан та довготривалу стійкість автодорожніх насипів [1].

Звідси постає проблема оцінювання міцності ґрунту в будь-якому можливому напруженому стані на основі експериментальних даних, отриманих для обмеженої кількості напружених станів. Розв'язання цієї задачі здійснюється із застосуванням відповідної теорії міцності, якою в даній роботі прийнято теорію Мора.

При використанні цієї теорії ґрунт розглядається не як дискретне тіло, яким він фактично є, а як суцільне середовище, у межах якого зусилля трактуються як середні напруження, віднесені до одиниці площі перерізу ґрунтового масиву. Такий підхід не суперечить основним принципам макрореології, оскільки розміри структурних елементів ґрунту є значно меншими порівняно з розмірами інженерних споруд та їх конструктивних елементів.

Сутність цієї теорії в сучасному її викладі в найбільш загальному вигляді можна виразити так:

- 1) руйнування матеріалу відбуватися в результаті досягнення граничного значення різниці між більшою і меншою головною напругою (тобто граничного значення девіатора напруг);
- 2) граничне значення девіатора напруг залежить від значення та знака меншої головної напруги.

Під міцністю матеріалу розуміється його здатність витримувати без руйнування певний напружений стан. Граничне значення цього напруженого стану, виражене чисельно, визначає міцність матеріалу.

У відповідності з теорією міцності Мора міцність матеріалу можна охарактеризувати різними способами, тобто різними граничними кривими. Узагальненими характеристиками міцності є параметри граничних кривих, які виявляються різними залежно від того, яку криву ми будуємо. І якщо не прийняти будь-якої передумови щодо механізму руйнування, ці параметри будуть мати свого роду формальний характер.

Морем запропоновано як граничну криву приймати обгинальну кругів. У цьому випадку досягнення межі міцності характеризується досягненням певного (граничного) значення дотичної напруги на деякому майданчику, орієнтування якої по відношенню до головних напрямків визначається положенням точки дотику на колі. Однак досягнення на заданому майданчику ще не означає, що руйнація відбудеться саме на цьому майданчику. Якщо ж покласти, що руйнація відбувається за цими майданчиками, це означає розглядати будь-яке руйнування як наслідок зсуву по деяким майданчикам із найбільш не вигідним співвідношенням нормальних і дотичних напруг.

Такий підхід, будучи певною мірою формальним (у тому сенсі, що ми відволікаємося від дійсного механізму руйнування матеріалу), дає і низку практичних переваг, зводячи складне явище до найпростішої схеми, розглянутої по суті Кулоном, і вносячи певний фізичний зміст в параметри граничної лінії.

Таким чином, приймаючи як вихідну узагальнену теорію міцності теорію Мора і допускаючи потім, що руйнування відбувається внаслідок впливу дотичних напруг на деяких майданчиках ми переходимо до відомої теорії Мора-Кулона.

Відповідно до цієї теорії параметри огинаючої кіл Мора є характеристиками опору ґрунту зсуву.

Ще Мором запропоновано замінити обгинальну кругів прямою, дотичних цих кіл. Численні експериментальні дані показують, що у обмеженому діапазоні нормальних напруг така заміна цілком можлива і доцільна, так як спрощує не тільки експериментальні визначення параметрів міцності, але і спрощує розрахунки на міцність.

У цьому випадку рівняння граничної лінії набуває вигляду:

$$\tau_{\text{гр.}} = c + f \cdot \sigma_n, \quad (1)$$

де,  $c$  – відрізок, отсекаемый спрямляющей лінією на осі ординат, величина, що називається зчепленням, яку умовно у фізичному сенсі вважатимуться міцністю ґрунту на зсув при нульових нормальних напругах;

$f$  – кутовий коефіцієнт спрямовуючої лінії..

Разом з тим у нашому випадку  $c$  і  $f$  не постійні, а змінюватимуться залежно від того, в якому діапазоні нормальних напруг ми спрямовуємо граничну обгинальну. Найбільшу крутизну вона має в зоні малих нормальних напруг. У зв'язку з цим значення параметра  $c$ , що визначається для діапазону малих навантажень, буде завжди менше того ж значення, що визначається для діапазону великих нормальних напруг.

Постає питання: як цю закономірність конкретизувати?

Спроби виділити групи елементів, для яких можуть бути побудовані граничні криві, що обгинають, не мали успіху. Не підтвердились результати проведених рядом дослідників експериментального визначення форми огинаючої, що привело до висновку, що вона має складне огертання, близьке до параболічного. Це пояснюється мабуть тим, що у експериментах величини менших основних напруг варіювалися як і позитивному, і негативному діапазоні, що відповідає умовам роботи досліджуваного насипу, у кожній точці якого головні напруги є ожимаючими.

Було також зіставлено виконану побудову кіл Мора з даними експериментальних досліджень механічних властивостей ґрунтів. При цьому було виявлено відповідність у формі кривих, що описують залежність між дотичними і нормальними напругами для різних рівнів напруженого стану для різних рівнів напруженого стояння на майданчиках, орієнтованих певним чином по відношенню до головних напрямків (рис.1). Цікаво, що криві дійсно мають близький до параболи контур, хоча аналогія з вищезгаданими результатами досліджень дуже умовна так як по-перше, вершина параболи знаходиться в області ожимаючих, а не нормальних напруг, що розтягують, а по-друге, крива не є по суті огинаючої кіл. Строго ж виконана побудова огинаючої та аналіз отриманої кривої не свідчить про правомірність вважати цю криву граничною, хоча б з тієї причини, що чисельним розрахунком отримані більші значення дотичних напруг ніж значення  $\tau_{гр.}$ , що визначаються точками торкання цієї кривої до кіл напружень.

На жаль, встановлений факт анології залежностей дотичних і нормальних напруг, отриманих чисельним розрахунком і експериментально, не може бути безпосередньо використаний при вирішенні поставленої задачі, оскільки неясним залишається питання про орієнтацію майданчика граничного стану: автори пропонують визначати її в залежності від співвідношення між напругою напруги та придатності пластичних деформацій. досліджуваного ґрунту в приладі 3<sup>х</sup>осного стиснення.

Однак, незважаючи на це, аналіз факту відповідності дозволяє зробити висновок: по-перше, про хорошу узгодженість даних розрахунку напруг МКЕ з експериментальними; і по-друге, про справедливість закону сухого тертя Кулона у відповідності граничної рівноваги ґрунту.

Але при всій значущості цих висновків питання про визначення граничного опору ґрунту зсуву залишається відкритим, оскільки нормальні напруги, відносяться до області, для якої огинаюча має прямолінійний обрис (що в свою чергу тягне за собою сталість параметрів зчеплення і кута внутрішнього тертя) діють лише в дуже невеликій частині найбільш завантажених силами власної ваги елементів насипу, причому найбільш віддалених від привідкосної області, яка нас цікавить.

Необхідно було прийняти якусь передумову щодо характеру залежності однієї з характеристик міцності ( $\varphi$  або  $c$ ) від напруженого стану, і тоді друга могла бути отримана за допомогою застосування рівнянь граничної рівноваги.

Найбільш зручним виявилось характеризувати напружений стан ставленням між головною напругою (більшою і меншою). Більше того, зіставлення картини розподілу ізолій  $\sigma_1/\sigma_2$  і ізолій дотичних напруг, отриманих чисельним розрахунком, і аналіз анології, що спостерігається, хоча і не дає підстав говорити про яскраво виражену залежність цих 2<sup>х</sup>факторів, але свідчить про їх істотний взаємозв'язок.

Таким чином, якби йшлося про сипкий ґрунт, то логічно було б використати відому залежність теорії міцності Мора.

$$\sin\varphi_{сип.} = \frac{\sigma_1/\sigma_2 - 1}{\sigma_1/\sigma_2 + 1}. \quad (2)$$

Але оскільки досліджувана насип, як передбачалося, складена зв'язними ґрунтами, то логічно очевидно, що наявність зчеплення збільшить нормальну напругу до майданчика за рахунок появи сил зв'язності, і тим самим зменшить кут внутрішнього тертя ґрунту. У розрахунку ця зміна була відображена виданням понижувального коефіцієнта.

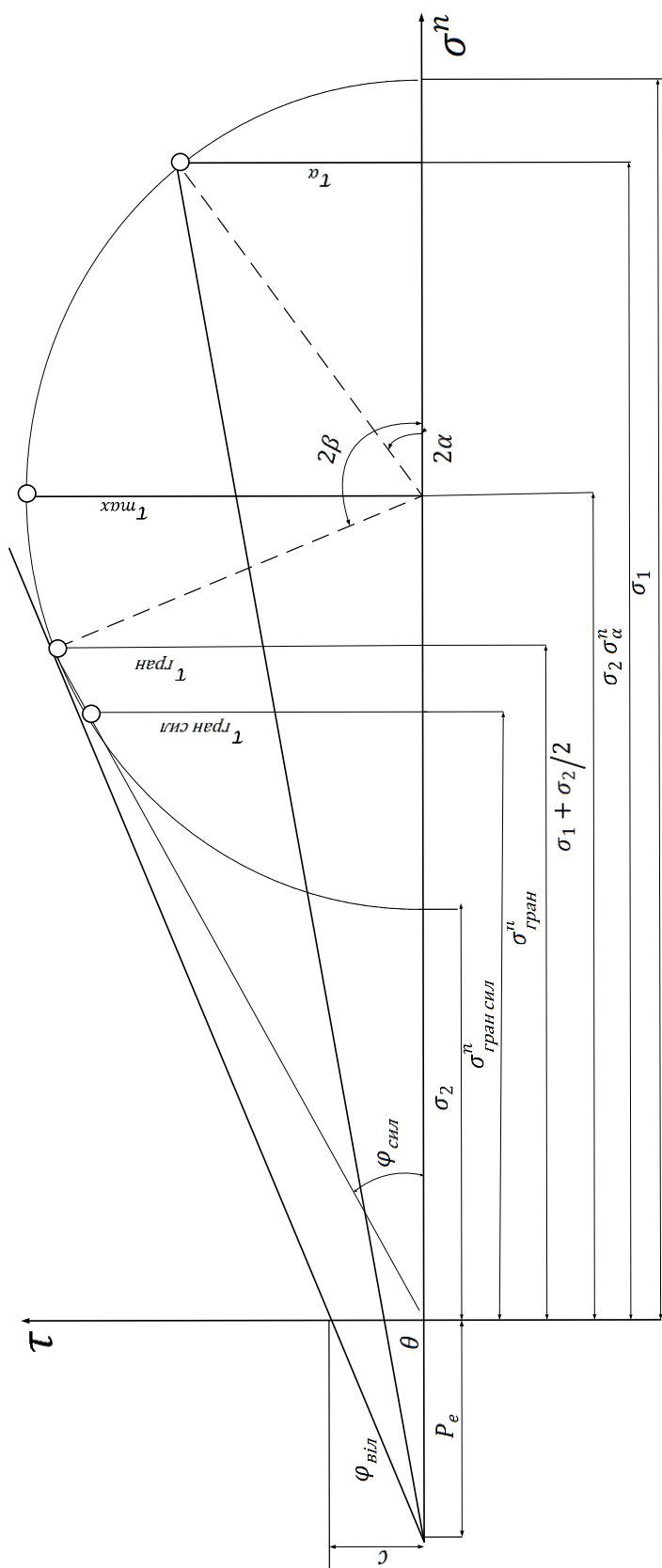


Рисунок 1 – Коло граничних напруг Кулона-Мора (до розрахунку параметрів зсувостійкості та обґрунтування критерію міцності)

Figure 1 – Mohr-Coulomb limit stress circle (for calculating shear resistance parameters and substantiating the strength criterion)

При аналізі різних варіантів його розрахунку головним критерієм було збільшення параметра зчеплення зі збільшенням більшої головної напруги (у відповідності з експериментальними даними викладеними). Значення параметра  $c$  приймалося рівним 0,015 МПа для прямолінійної ділянки граничної кривої, що також відповідає результатам досліджень механічних властивостей суглинистого ґрунту.

Для задоволення цим вимогам найбільш доцільно виявити понижуючий коефіцієнт постійним в межах кожного вертикального стовпа і визначати його як відношення синусів кутів внутрішнього тертя, отриманих відповідно при  $c = 0$  ( $\sin\varphi_{\text{сип.}}$ ) і  $c = 0,015$  МПа для елементів, граничний стан яких описується прямолінійною ділянкою. Для вертикальних стовпів з відсутністю таких елементів коефіцієнт приймався шляхом порівняльного аналізу.

У розрахунках параметри  $\varphi$  і  $c$  були пов'язані відомою умовою граничної рівноваги для зв'язкових ґрунтів:

$$\frac{1}{\cos\varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \operatorname{tg}\varphi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = c. \quad (3)$$

Незважаючи на те, що широко прийнятий на практиці в розрахунках стійкості укосів методом граничної рівноваги часто піддається критиці через спрощеність пропозицій і неоднозначності рішень, ми все ж таки вважали за можливе використовувати тут і дали можливим використовувати тут і далі його залежності. Підставою для цього послужило і наявність інших думок і навіть цілих досліджень, які б показували переваги цього методу. Зокрема викладеної в [2] порівняльний аналіз методів граничного стану, кінцевих елементів і граничної рівноваги, дозволимо авторам зробити висновок про те, що останній має достатню точність, а обмеження, пов'язані із застосуванням методу граничного стану напруг і МСЕ підтверджують повну придатність методу граничної рівноваги для розрахунків стійкості.

**Обґрунтування критерію міцності ґрунтів земляного полотна.** Серед безлічі існуючих пропозицій щодо визначення коефіцієнта запасу міцності ґрунту більша частина у своїй основі використовує уявлення про неперед заданої форми поверхні обвалення. В даний час широко застосовуються в розрахунку стійкості укосів метод круглоциліндричних поверхонь ковзання, який значно спрощує реальний процес руйнування укосу. Недоліки цього визначення коефіцієнта запасу (називаємо його далі  $K_3$ ) докладно викладені [3].

Інше визначення  $K_3$  як ставлення значень показників міцності, у яких відбувається руйнація до їх фактичному нормативному значенню також дуже недосконало, т.к. зберігаються недоліки, притаманні методам із заздалегідь заданою поверхнею обвалення і не розглядається взаємозв'язок із напружено-деформованим станом насипу в цілому.

Ряд авторів [3] для виділення в тілі ґрунтового масиву зон з граничним напруженим станом було запропоновано використання коефіцієнта, що визначає ступінь використання максимального опору ґрунту, у вигляді співвідношення різниці головної напруги до їх максимального значення, так званої "пропорції перенапруги":

$$K_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}}, \quad (4)$$

де  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max}$  визначається виходячи з рівнянь граничного стану з теорії Кулона-Мора:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max} = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\varphi + 2c \cos\varphi \quad (5)$$

Припускаючи залежність характеристик міцності ґрунту від його напруженого стану, викладену методику неможливо використовувати без детальних даних про цю залежність.

Велику перспективність розрахунку коефіцієнта запасу стійкості як відношення руйнівного навантаження до розрахункового відзначали ще В.А. Флорін та П.А.Нечипорович. Ця ідея відповідає принципу, що зарекомендував себе в розрахунках конструкцій та споруд з руйнівних навантажень. Метод не набув поширення на практиці розрахунків стійкості у зв'язку з необхідністю використання спрощених розрахункових схем, які допускають проведення розрахунків при руйнівних навантаженнях. Однак розробка чисельних методів розрахунку дозволяє проаналізувати на основі єдиної розрахункової моделі розвитку напружено-деформованого стану насипів при різній інтенсивності навантажень і, у тому числі, при практично граничних їх значеннях без будь-яких припущень, що спрощують, що призводять до зниження достовірності результатів розрахунку.

При реалізації цієї методики визначення  $K_3$  явно слід було б, зафіксувавши значення деформованих характеристик у вузлах сітки розбиття, робити ступінчасте навантаження насипу. Ітераційний процес розрахунку зміни напружено-деформованого стану при кожному збільшенні навантаження буде продовжуватися аж до досягнення навантаження руйнівного значення. Але це порівняно досконалий шлях передбачає наявність лабораторних даних за механічними властивостями ґрунту, необхідних для коригування значень деформаційних характеристик у вузлах сітки після застосування кожного ступеня навантаження і тому не міг бути використаний.

Відоме становище теорії Мора у тому, що руйнація матеріалу відбувається у результаті досягнення граничного значення різниці між головними напругами, тобто по досягненні дотичними напругами свого максимуму на деяких майданчиках, певним чином орієнтованих по відношенню до головних напрямків послужило обґрунтуванням для прийняття коефіцієнта запасу міцності у вигляді відношення максимального значення дотичної напруги для цього напруженого стану кінцевого елемента до діючого. Причому як останній було прийнято дотичну напругу по горизонтальному майданчику  $\tau_{zx}$ :

$$K_3 = \frac{\tau_{max}}{\tau_{zx}}. \quad (6)$$

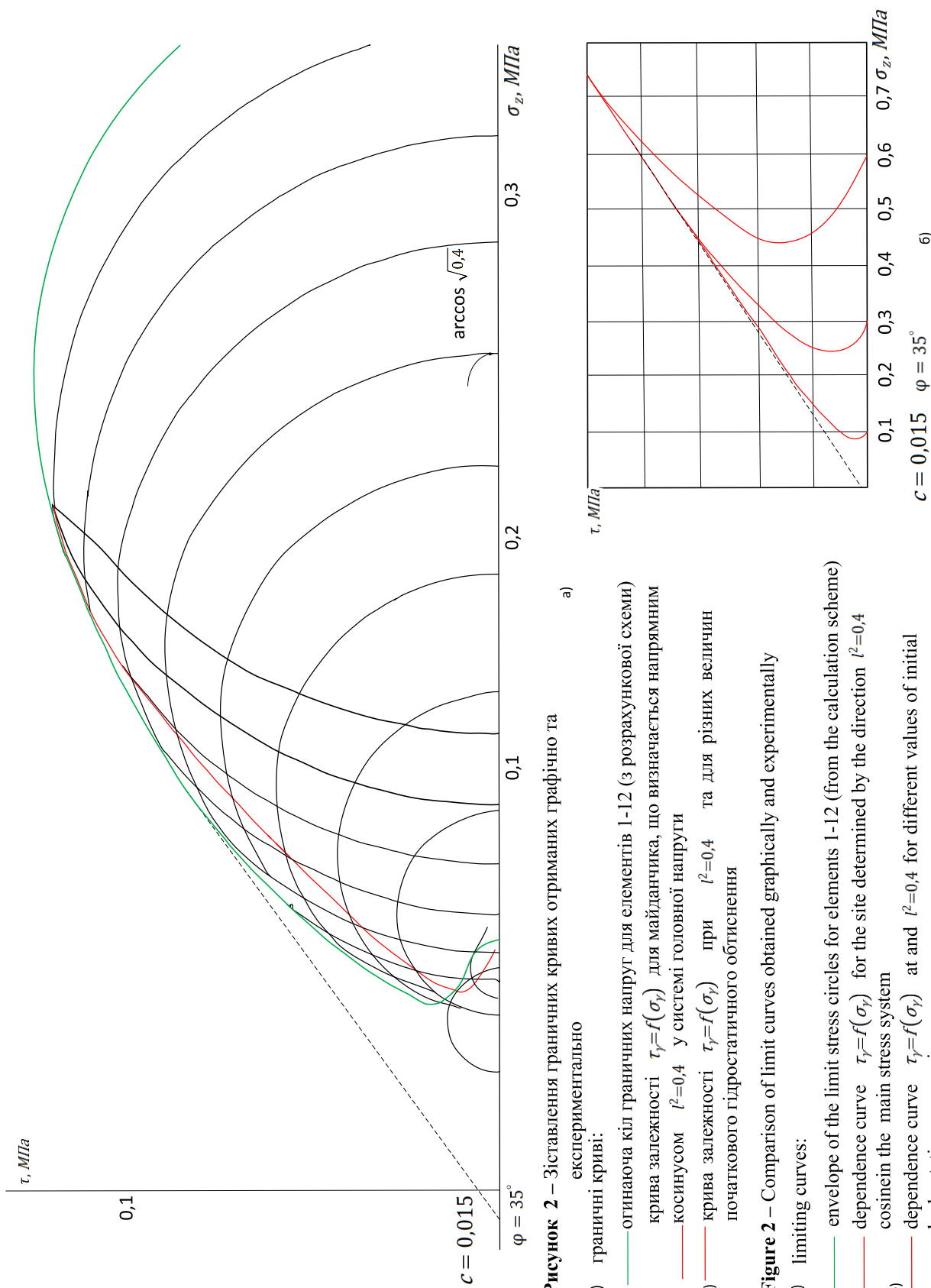
$$\tau_{zx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7)$$

Розрахунки  $K_3$  виконані для  $Z^x$  насипів з різною крутістю укосу показали, що незалежно від геометрії поперечного перерізу практично у всіх точках відкосової зони максимальні дотичні напруги діють по горизонтальних майданчиках або дуже близьких до них (як для верхніх і нижніх бровок насипу) і відповідно  $K_3 = 1$  точно або приблизно.

Таким чином використання коефіцієнта не забезпечує ефективність порівняльної оцінки стійкості елементів земляного полотна.

У відповідності з умовою руйнування, прийнятою в теорії Мора-Кулона (досягнення деякого майданчика граничного, найбільш невідповідного значення дотичної напруги) логічно було б на перший погляд прийняти коефіцієнт запасу як співвідношення між граничними і фактичними значеннями напруг. Важливим тут є питання орієнтації майданчиків, якими враховується цей фактичний напружений стан. Логічно, це мають бути майданчики з максимальним рівнем напруженого стану, тобто, майданчики дії максимальної дотичної напруги. Розрахунок  $K_3 = \frac{\tau_{грн}}{\tau_{max}}$ , було виконано (рис.2).

Однак звертає на себе увагу той факт, що величина  $\tau_{max}$  у співвідношенні  $K_3$  є похідною від величин, безпосередньо отриманих чисельним розрахунком і, отже, може бути піддана неточностям формульного розрахунку. Переважно було б фігурування у формулі вихідних величин. Тому було прийнято рішення використовувати для визначення  $K_3$  величину дотичних напруг, що діють горизонтальними майданчиками, і таким чином розглядати досягнення граничного стану ґрунтового масиву горизонтальними майданчиками. Правомірність цього припущення підтверджується і таким, що, як було показано раніше, у привідкосній зоні насипу максимальні дотичні напруги діють горизонтальними майданчиками або близькими до них.



З іншого боку, в кожній точці з певним напруженим станом існує два майданчики, однаково нахилені до майданчика  $\tau_{max}$ , по яких діють рівні по абсолютній величині напруги  $\tau_{грн}$ , але тільки на одній з них має найбільше, тобто, найменш вигідне співвідношення між дотичними та нормальними до цього майданчика напругою. Саме це співвідношення, а не абсолютна величина відповідної йому дотичної напруги найкраще відобразить напружений стан у точці ґрунтового масиву. Вираз для  $K_3$  набуває вигляду:

$$K_3 = \frac{\tau_{грн}}{\frac{\sigma_{грн}^n}{\tau_{zx}}}, \quad (8)$$

де  $\sigma_{грн}^n$  і  $\sigma_{zx}^n$  - напруги, що діють нормально до граничного та горизонтального майданчиків відповідно.

Враховуючи зв'язність ґрунту, в обох випадках при математичному розгляді питання до нормальних ми відносимо і сили зв'язності, які сумарно оцінюються так званим тиском зв'язності, на колі Мора представленим відрізком  $\beta_e = c/tg\varphi = c \cdot ctg\varphi$ .

Використовуючи геометричні закономірності круга Мора, надаємо (8) вид;

$$K_3 = \frac{\frac{\tau_{грн}}{\sigma_{грн}^n}}{c \cdot ctg\varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau^2}}. \quad (9)$$

звідки, враховуючи, що співвідношення  $\frac{\tau_{грн}}{\sigma_{грн}^n}$  є тангесом так званого кута внутрішнього тертя, а величина  $c$ , що називається зчепленням, виражається математично як

$$c = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} tg \varphi. \quad (10)$$

отримуємо

$$K_3 = \frac{tg \varphi \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \sin \varphi} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau^2} \right)}{\tau_{zx}} \quad (11)$$

або

$$K_3 = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cos \varphi} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau^2} \cdot tg \varphi}{\tau} \quad (12)$$

Однією з головних вимог до критерію міцності був правильний облік виду напруженого стану точки ґрунтового масиву: найбільш не вигідне співвідношення між головними напрямками мало виразитися у зменшенні коефіцієнта запасу міцності. Виконані розрахунки  $K_3$  для чотирьох розрахункових схем високого насипу різної геометрії дозволили зробити висновок про невідповідність критерію (12) на цю вимогу.

Ряд побудов кіл Мору для елементів з різним рівнем напруженого стану який зручніше за все висловити через співвідношення головних напруг  $\sigma_1/\sigma_2$  дозволив виявити джерело помилки : кожній групі точок з однаковим кутом між майданчиками  $\tau_{zx}$  і  $\tau_{грн}$  (відповідного максимальному  $\sigma^T$ ) найбільший  $K_3$  визначальний, має точка з найбільшим співвідношенням  $\sigma_1/\sigma_2$ , що призводить до своєрідного збільшення масштабу і в свою чергу спричиняє збільшення співвідношення  $tg \varphi / tg \theta$ , де  $tg \theta = \frac{\tau_{zx}}{\sigma_{zx}^n}$

Необхідність введення виправлення на напружений стан впливає з аналізу виразу (12).

Дійсно, у відповідності зі зробленою пропозицією про конкретизацію залежності сдвигових параметрів від напруженого стану ґрунту, функції кута  $\varphi$  визначається як

$$\sin \varphi = k \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{(1-k^2)\sigma_1^2 + (1-k^2)2\sigma_1\sigma_2 + (1-k^2)\sigma_2^2}}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sqrt{(1-k^2)\sigma_1^2 + (1+k^2)2\sigma_1\sigma_2 + (1-k^2)\sigma_2^2}},$$

де  $k$  - деякий числовий коефіцієнт

Тоді

$$K_3 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2) + k(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau^2}}{2\tau\sqrt{(1-k^2)\sigma_1^2 + (1+k^2)2\sigma_1\sigma_2 + (1-k^2)\sigma_2^2}} \quad (14)$$

Після поділу на  $\sigma_2^2$

$$K_3 = \frac{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 + k\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)^2 - \left(\frac{2\tau}{\sigma_2}\right)^2}}{\frac{2\tau}{\sigma_2}\sqrt{(1-k^2)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 + 2(1-k^2)\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + (1-k^2)}} \quad (15)$$

Не претендуючи на роль суворого математичного доказу, вираз (15) все ж таки свідчить про те, що щодо  $\sigma_1/\sigma_2$  ступінь чисельника на одиницю більше ступеня знаменника. Таким чином, введення поправки на напружений стан доцільно ввести у вигляді розподіл правої частини (15) на відношення головних напруг  $\sigma_1/\sigma_2$ , або, що те ж саме, множенням на відношення меншої головної напруги до більшого.

В остаточному вигляді шуканий критерій, який ми назвемо показник відносної міцності, визначається:

$$P_y = 10 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\cos\varphi} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \tau^2 \operatorname{tg}\varphi}}{\tau_{zx}}, \quad (16)$$

де числовий коефіцієнт 10 був уведений для наочності при побудові ліній рівних показників стійкості.

Недоліком даної методики є той факт, що вона не дає точних кількісних характеристик стійкості ґрунтів земляного полотна, не може служити для оцінки абсолютної близькості стану до стану руйнування. Однак цим недоліком більшою чи меншою мірою страждають усі методики, де граничні характеристики міцності, фігуруючі в зіставленнях, отримані побічно на основі даних про напружений стан ґрунту про використання будь-якої теорії міцності. Так, не можна стверджувати, що достатньою умовою руйнування є досягнення дотичною напругою свого граничного значення, обчисленого у відповідності з теорією Мора-Кулона як і не обов'язковим є збіг майданчика обвалення з майданчиком з найменш вигідним співвідношенням між дотичним і нормальним.

Позбутися цього недоліку можна лише шляхом отримання дійсних міцнісних характеристик ґрунту (в даному випадку - його опору зсуву як граничної дотичної напруги на майданчику, що

цікавить нас) з експериментальних досліджень складових насипу ґрунтів, тобто безпосередньо із досвіду.

Разом з тим, запропонований критерій переконливо відображає якісну картину розподілу відносної міцності ґрунтів по поперечному перерізу насипу, виявляє місце розташування, розмір і форму найбільш небезпечних зон в сенсі близькості до граничного стану, і, слід вважати, найбільш схильних до обвалення.

Зручним і ефективним стало застосування показника відносної міцності до порівняльної оцінки насипів різного поперечного перерізу (зокрема, з різною конфігурацією укосів) для виявлення оптимального варіанту, що характеризується найбільшою стійкістю небезпечних зон. Використання запропонованого критерію показового та для оцінки зменшення стійкості ґрунтів земляного полотна при впливі на нього несприятливих факторів, якими може виступати використання ґрунтів з ослабленими характеристиками міцності. Результати таких досліджень, проведених з урахуванням застосування показника відносної стійкості.

**Аналіз стійкості еталонного насипу.** Власна напруга ґрунтового масиву, поряд з напругами від тимчасового навантаження, надають значний вплив на експлуатаційну надійність земляного полотна автомобільної дороги; причому їх частка в загальній сумі напруг істотно зростає в міру збільшення висоти насипу, Тому, ставлячи своєю метою аналіз і зіставлення існуючих методів оцінки напруженого стану дорожніх насипів, ми зробили головний акцент на розрахунок напруг у тілі високих дорожніх насипів, складених зв'язними ґрунтами як найбільш часто застосовуваними для споруд.

Еталонний насип у дослідженнях представлений такими характеристиками: висота - 14 м; ширина по верху – 15 м; крутість укосів - 1:1,5 (по всій висоті); ґрунт - суглинок щільністю 1,8 г/см<sup>3</sup> і середнім значенням коефіцієнта Пуассона = 0,3.

При дослідженні питань стійкості великий інтерес представляє проблема визначення найбільш ймовірних форм і положення поверхні ковзання частини ґрунтового масиву, що втратила міцність. Так як запропонована методика не передбачає завдання будь-якої передумови в тому відношенні, що було вирішено отримати потенційні поверхні ковзання графічним побудовою, виконаним у відповідності з відомим положенням теорії Мора-Кулона про те, що при втраті стійкості ковзання відбувається по майданчику дії граничних дотичних напруг, причому з найбільшим, тобто найменше вигідним співвідношенням між нормальними і зсувними напругами.

Для кожного елемента земляного полотна досліджуваного еталонного насипу кут між горизонтальною і граничною дотичною напругою, отриманий із співвідношення

$$(\tau_{zx}, \tau_{gp}) = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2}}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{180}{\pi}, \text{ град} \quad (17)$$

та визначив нахил майданчика ковзання до горизонталі.

Для наочності побудови були показані також абсолютні значення величин напруг

$$\tau_{gp} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos \varphi. \quad (18)$$

Характерним тут є їх зменшення з наближенням до укосу та іншим вільним поверхням як у вертикальних стовпах елементів, так і в горизонтальних шарах. Ця закономірність спотворюється лише поблизу вертикальних меж схеми поперечного перерізу, тобто в зонах, значно віддалених від укосу.

Майданчики ковзання, побудовані для центрів кінцевих елементів і – по інтерполяції в міжцентрових областях, дозволили викреслити лінії, що стосуються яких у кожній точці ґрунтового масиву збігаються з напрямком майданчиків ковзання. Відповідно до теорії Мора-Кулона ці криві є потенційними поверхнями ковзання.

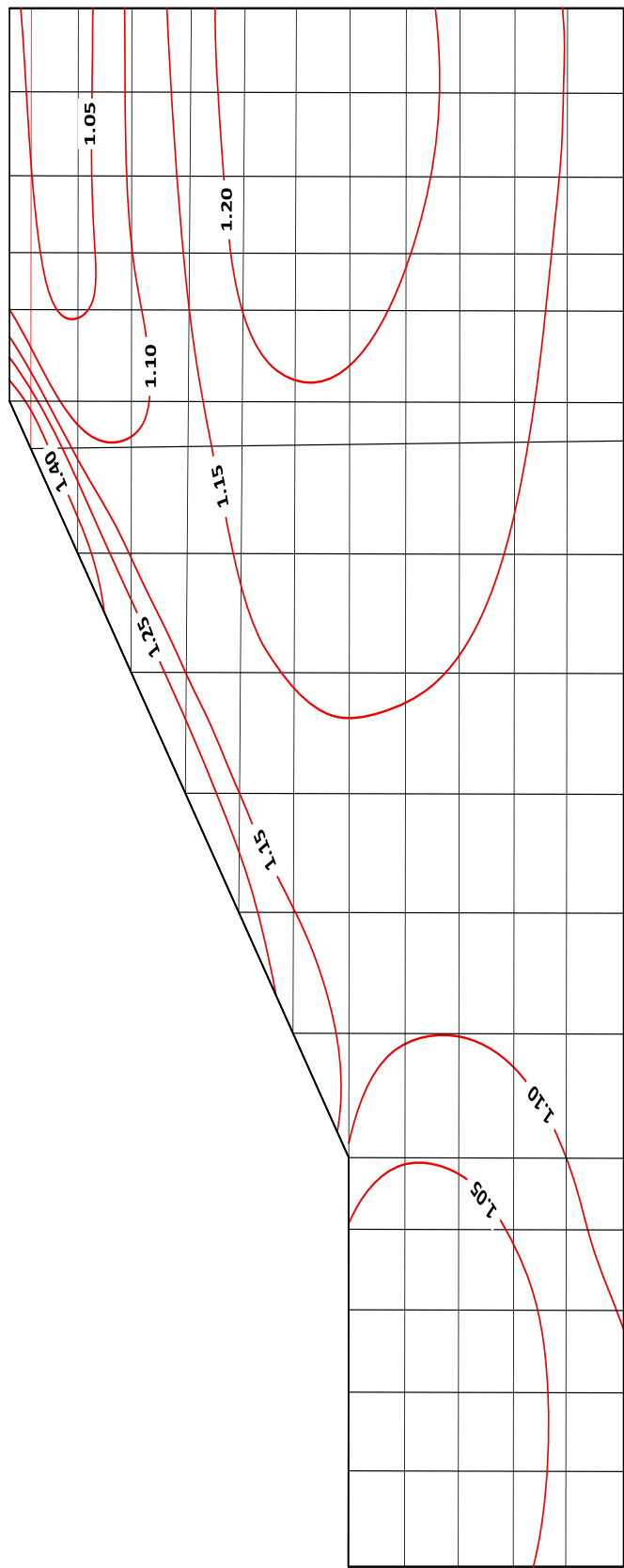


Рисунок 3 - Ізолінії рівних відносин  $\tau_{max} / \tau_{гран}$  для сталонної наспизи  
 Figure 3 - Equal relationship contours  $\tau_{max} / \tau_{гран}$  for the reference pile

Аналіз форми цих поверхонь виявляє їх тенденцію до паралельності укосу, особливо для кривих, що заглиблюються в основу. Аналіз форми цих поверхонь виявляє їх тенденцію до паралельності укосу, особливо для кривих, що заглиблюються в основу. Що стосується останніх, то, дійсно, в елементах, що належать до нижньої брівки укосу нахил майданчиків ковзання близький до горизонтального, а це свідчить про найбільшу крутість поверхні ковзання в цій області та її вихід на вільну поверхню основи. В цілому, більшою прогнутістю характеризуються криві, розташовані ближче до верхньої частини укосу. Ці результати добре узгоджуються з даними досліджень Крижанівського [3, 5, 6], який дійшов висновку про те, що побудовані та використанні даних МСЕ поверхні ковзання мають набагато більш пологі обриси порівняно з круглоциліндричними, і особливо яскраво це проявляється при збільшенні висоти насипу.

Як зазначалося вище у пошуку критерію міцності стійкість еталонного насипу було прораховано щодо різноманітних виразів коефіцієнта запасу. Коротко зупинимося на результатах деяких із них.

На рисунку 3 представлені ізолінії рівних відносин коефіцієнта запасу, що визначається відношенням

$$k_3 = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{гр}}} \quad (19)$$

Зазначимо: специфіка  $k_3$  така, що найменш стійкою виявиться зона з  $k_3 = 1$ , а  $k_3 > 1$  усього лише визначають ступінь близькості до граничного стану.

Треба сказати, що отримана картина стала протиріччям зробленим раніше прогнозам про мінімальну стійкість верхньої укосної зони. Значення  $k_3$  зменшуються в міру наближення до нижньої брівки земляного полотна і далі по вільній поверхні основи. Разом з тим її позитивним моментом є наявність деякої відносної зони, що проходить по опуклостям ізоліній із значеннями  $k_3 = 1.05$  та  $k_3 = 1.10$  і між ізолініями з  $k_3 = 1.15$ . Її можна було б визначити як можливу поверхню обвалення. Те, що верхня частина цієї кривої відхиляється в бік осі і не виходить на вільну поверхню поперечного перерізу на перший погляд здається незвичайним, але тут слід зазначити, що поява пластичних зон по осі насипу паралельно або навіть раніше їх появи на укосах, відмічались цілим рядом авторів [3].

Подібне явище, хоч і виражене менш яскраво, має місце при розрахунку стійкості насипу з використанням:

$$k_3 = \frac{\tau_{\phi}}{\tau_{\theta}} \quad (20)$$

(Дивись формулу (12)). Це виявилось тут у значному відхиленні ізоліній у бік осі насипу.

Розподіл значень  $k_3$  по поперечному перерізу насипу виявляє дві найменш стійкі зони, що огинають верхню і нижню брівки укосу, причому верхня має велику відносну близькість до граничного стану. Крім того, за результатами розрахунку найбільшою відносною стійкістю володіла верхня частина укосу, в той час, як саме там спостерігаються максимальні дотичні напруження і загальний високий рівень напруженого стану, а також найбільші величини переміщень. Це був перший аргумент у сенсі незадовільності даного критерію, вирішальним же чинником став той, що для укосів з меншою крутістю він дає менші значення  $k_3$ , що говорить про його неприйнятність для порівняльного аналізу стійкості насипів різної конфігурації.

Звернемося тепер до результатів розрахунку показника відносної стійкості (18) елементів еталонної насипу.

Перше, що звертає на себе увагу, що ізолінії  $P_y$ , які являють собою проекції поверхонь з різною відносною міцністю ґрунтів, мають форму охоплюючу усі кривих і в міру наближення до укосу у своїй найбільш пологій частині виявляють паралельність з вільною укісною поверхнею. Нагадуємо,

що цю ж тенденцію виявляють побудовані згідно з теорією Мора-Кулона потенційні поверхні ковзання. Як і передбачалося раніше найменш стійкою виявилася верхня частина укосу, яка, як уже не раз зазначалося, має найбільше значення отриманих чисельним розрахунком величин дотичних напруг  $\tau_{zx}$  і горизонтальних переміщень, а також характеризується загальним високим рівнем напруженого стану.

Форма ізоліній у безпосередній близькості від поверхні укосу отримана інтерполяцією, так як визначається лише центрів тяжкості кінцевих елементів. У міру наближення до нижньої брівки земляного полотна кут виходу ізоліній на укіс збільшується і для кривих, що виходять на верхню межу основи становить майже  $90^{\circ}$ . Взагалі, слід зазначити, що лінії рівних значень  $P_y$  (особливо для  $P_y = 6 \div 10$ ) за формою та розташуванням у тілі земляного полотна дуже нагадують поверхні ковзання, отримані рядом авторів.

Ізолінії великих значень  $P_y$  ( $P_y = 10 \div 20$  і більше) формально також були огибаючими укіс, не замикаються в межах розрахункової схеми через свою значну поглибленість в основу під нижньою частиною укосу.

У вузьких зонах, що прилягають до осі насипу та вертикальної межі основи, спостерігається дуже швидке зростання величини показника відносної стійкості до високих абсолютних величин (30 і більше). Це дає підстави вважати про значний спотворює вплив закріплених меж розрахункової схеми на моделювання напруженого стану цих областей.

Це є особливо важливим у світлі існуючої думки про швидке досягнення деякою областю приукосної частини насипу свого граничного стану. У розподілі  $P_y$  це частково відбилося в існуючому мінімумі деякої горизонталі, паралельної верху конструкції.

Як ми побачили далі, таке явище має місце і для інших розрахункових схем.

**Висновки:** 1. У запропонованій методиці визначення параметрів зсувостійкості ґрунту реалізована гіпотеза про збільшення зчеплення в ґрунах (параметр  $C$ ) зі зростанням рівня напруженого стану та зменшенням кута внутрішнього тертя зв'язних ґрунтів у порівнянні з сипучими внаслідок дії сил зв'язності (що визначаються зчепленням).

2. Потенційні поверхні ковзання, отримані у відповідності з теорією Мора-Кулона, для високого насипу мають набагато пологіший обрис, ніж круглоциліндричні (такого ж висновку дійшов і ряд інших авторів).

3. Для оцінки стійкості високих дорожніх насипів запропоновано показник відносної стійкості  $P_y$ , що визначається як співвідношення між відносинами дотичних і нормальних напруг на граничних та горизонтальних майданчиках з поправкою на напружений стан для кожного з кінцевих елементів поперечного перерізу. Вибраний критерій дозволяє отримати переконливу якісну картину розподілу міцності ґрунту, що складає насип, по поперечному перерізу в залежності від його напруженого стану. Ізолінії  $P_y$  описують форму і положення найбільш небезпечних у плані руйнування зон. Він зручний і показовий під час аналізу впливу зміни укосів і водно-теплого режиму на стійкість насипу. Разом з тим, його недоліком є те, що він не дає точних кількісних характеристик близькості до граничного стану.

4. Застосування  $P_y$  до аналізу стійкості еталонного насипу (розрахована схема, насип - пружна основа з постійною крутістю укосів) свідчать про наявність найменш стійкої області у верхній частині укосу, що характеризується в той же час найбільшими значеннями дотичних напруг, горизонтальних переміщень і загальним високим рівнем напруженого стану. Виявилася також явна аналогія огинаючий укос форми ізоліній  $P_y$  з формою поверхонь ковзання, отриманих у роботах інших авторів.

## Перелік посилань

1. Adaptive traffic signal optimization with thermal sensors and reinforcement learning / A. Balashov, O. Ponomarova, Y. Balashova, O. Tregub. *Results in Engineering*. 2026. Vol. 29. 108601. URL: <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.108601>.
2. Małe J. Ogólna metoda sprawdzania stateczności zboczy wzdłuż dowolnych powierzchni poślizgu. Cz. II. Ocena poprawności metody równowagi granicznej. *Arch. Hydrotechn.* 1978. Vol. 25, nr 4. S. 491–510.
3. Крижанівський А. Л., Куликов О. В. До розрахунку стійкості відкосів. *Гідротехнічне будівництво*. 1977. № 5. С. 38–44.
4. Naibor D. J. Finite elements and slope stability. *Numerical methods in geomechanics* / Department of Civil Engineering, University College of Swansea. P. 229–244.
5. Заворицький В. Й. Дослідження розподілу напружень у приукосній зоні земляного полотна. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво* : зб. наук. пр. Київ : Будівельник, 1984. Вип. 35. С. 6–12.
6. Заворицький В. Й. Вплив геометрії і властивостей ґрунту на напружено-деформований стан системи «насіп — основа». *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво* : зб. наук. пр. Київ : Будівельник, 1985. Вип. 36. С. 8–17.

## METHODOLOGY FOR ASSESSING THE STABILITY OF EMBANKS TAKING INTO ACCOUNT THEIR STRESSED STATE

**Petrovych Volodymyr V.**, postgraduate student of the Road Construction Materials and Chemistry Department, National Transport University, Kyiv, Ukraine, e-mail: [menor@ukr.net](mailto:menor@ukr.net), tel.+380930932262, <https://orcid.org/0009-0002-1513-2789>.

**Petrovych Ihor V.**, postgraduate student of the System Design of Transport Infrastructure and Geodesy Department, National Transport University, Kyiv, Ukraine, e-mail: [igor19932008@gmail.com](mailto:igor19932008@gmail.com), tel.+380663837188, <https://orcid.org/0009-0008-3551-3718>.

**Savenko Sergey S.**, postgraduate student, Road Construction and Property Management Department of National Transport University, e-mail: [sava0304@gmail.com](mailto:sava0304@gmail.com), тел.+380639570047, <https://orcid.org/0009-0007-2243-3471>.

**Chechuha Yevhen S.**, postgraduate student, Road Construction and Property Management Department of National Transport University, e-mail: [Cecugazena2@gmail.com](mailto:Cecugazena2@gmail.com), tel.+3800937533521, <https://orcid.org/0009-0008-6799-4843>.

**Yurchuk Vitaly V.**, postgraduate student of the International Transportation and Customs Control Department, National Transport University, Kyiv, Ukraine, e-mail: [urcukvitalij6@gmail.com](mailto:urcukvitalij6@gmail.com), tel.+380966611626, <https://orcid.org/0009-0008-8596-5296>.

**Summary.** This article examines the assessment of the stability of road embankments, taking into account their stress-strain state. Based on Mohr–Coulomb strength theory and the results of numerical modelling, a criterion for the relative strength of subgrade soils is proposed. An analysis of the stress state of a reference embankment has been carried out, and the distribution of critical zones within its cross-section has been determined. The possibility of using the proposed indicator for the comparative assessment of the stability of embankments with different geometries and for identifying potential slip surfaces has been demonstrated.

**Keywords:** road embankment, slope stability, stress-strain state, Mohr–Coulomb theory, soil strength, relative strength index, slip surfaces, finite element method.

### References

1. Balashov, A., Ponomarova, O., Balashova, Y., & Tregub, O. (2026). Adaptive traffic signal optimization with thermal sensors and reinforcement learning. *Results in Engineering*, 29, 108601. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.108601>.
2. Małe, J. (1978). Ogólna metoda sprawdzania stateczności zboczy wzdłuż dowolnych powierzchni poślizgu. Cz. II. Ocena poprawności metody równowagi granicznej [General method for checking the stability of slopes along arbitrary slip surfaces. Part II. Evaluation of the correctness of the limit equilibrium method]. *Arch. Hydrotechn.*, 25(4), 491–510. [in Polish].
3. Kryzhanivskiy, A. L., & Kulykov, O. V. (1977). Do rozrakhunku stiiikosti vidkosiv [On the calculation of slope stability]. *Hidrotekhnichne budivnytstvo [Hydrotechnical Construction]*, (5), 38–44. [in Ukrainian].
4. Naibor, D. J. Finite elements and slope stability. *Numerical methods in geomechanics*. Department of Civil Engineering, University College of Swansea, pp. 229–244.
5. Zavorytskyi, V. Y. (1984). Doslidzhennia rozpodilu napruzhen u priukosnii zoni zemlianogo polotna [Investigation of stress distribution in the near-slope zone of the roadbed]. *Avtomobilni dorohy i dorozhnie budivnytstvo [Automobile Roads and Road Construction]*, (35), 6–12. [in Ukrainian].
6. Zavorytskyi, V. Y. (1985). Vplyv gheometrii i vlastyvostei gruntu na napruzhenodeformovanyi stan systemy “nasyp – osnova” [Influence of geometry and soil properties on the stress-strain state of the "embankment-foundation" system]. *Avtomobilni dorohy i dorozhnie budivnytstvo [Automobile Roads and Road Construction]*, (36), 8–17. [in Ukrainian].

*Дата надходження до редакції 17.01.2026.*

*Дата прийняття статті після рецензування 02.02.2026.*